Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse II

Examen

Partie commune
Printemps 2018

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Analyse II du semestre de printemps 2018.

– Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
-1 point si la réponse est incorrecte.

– Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' + 6x^5y^2 = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = \frac{1}{3}$ vérifie aussi :

- ☐ $y(\sqrt{2}) = -\frac{13}{24}$
- ☐ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{3\,e^7}$
- ■ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{10}$
- ☐ $y(\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$

Question 2 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' + y = x^2e^{-x}$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi :

- ☐ $y(-2) = -3e^{-2}$
- ■ $y(-2) = -3e^{2}$
- ☐ $y(-2) = -\frac{5}{4}\left(e^2 - e^{-4}\right)$
- ☐ $y(-2) = -\frac{1}{4}\left(e^4 - 13e^{-2}\right)$

Question 3 La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'' - 2u' + 5u = 17\sin(2t)$$

qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 1$ vérifie aussi :

- ☐ $u(\pi) = 4 - 4e^{\pi}$
- ■ $u(\pi) = 4 - 3e^{\pi}$
- ☐ $u(\pi) = -4 + 5e^{\pi}$
- ☐ $u(\pi) = 4$

Question 4 Soient les sous-ensembles

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 0\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Alors l'ensemble non vide $A \cap B \subset \mathbb{R}^3$ est :

- ☐ ouvert et borné
- ■ fermé et borné
- ☐ ouvert et non borné
- ☐ fermé et non borné

Question 5 La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} + \dfrac{x y^3}{x^2+y^6} \right)$

- [ ] vaut 0
- [x] n'existe pas
- [ ] vaut 2
- [ ] vaut 1

Question 6 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{2+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}\,, & \text{si } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors :

- [x] la fonction f est continue en $(0,0)$
- [ ] $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$
- [ ] $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe mais $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existe pas
- [ ] la fonction f est continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$

Question 7 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors :

- [ ] Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existent pas
- [x] Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- [ ] f est différentiable en $(0,0)$, mais f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- [ ] f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Question 8 Soit la surface $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 4z^2 = 6\big\}$. L'équation du plan tangent à S au point $(-1,1,1)$ est donnée par :

- [ ] $x - y - 4z + 6 = 0$
- [ ] $4x - 2y - 8z - 14 = 0$
- [ ] $4x - 2y - 8z + 8 = 0$
- [x] $2x - y - 4z + 7 = 0$

Question 9 Soit la fonction $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^y \\ y^2 + x \end{pmatrix}$.

Alors la matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}$ évaluée en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est :

☐ $J_{\boldsymbol{f}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \operatorname{Log}(1+x^2)\, 2x & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$

☐ $J_{\boldsymbol{f}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \operatorname{Log}(1+x^2) \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$

■ $J_{\boldsymbol{f}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \operatorname{Log}(1+x^2) & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$

☐ $J_{\boldsymbol{f}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \operatorname{Log}(1+x^2)\, 2x \\ 1 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 10 Soient $\boldsymbol{g} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $\boldsymbol{g}(u, v) = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$ et $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy + e^y \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & h(u, v) \end{array}$$

définie par $h = f \circ \boldsymbol{g}$ satisfait :

☐ $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0, 1) = -3$

☐ $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0, 1) = -1$

■ $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0, 1) = -3$

☐ $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0, 1) = -1$

Question 11 Soit $(x_0, y_0) = \left(\sqrt{\pi/6}\,,\ \sqrt{2\pi/3}\,\right)$ et soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \sin\bigl(x^2\bigr) + \cos\bigl(y^2\bigr)\,.$$

L'équation $f(x, y) = 0$ définit dans un voisinage de x_0 une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f\bigl(x, g(x)\bigr) = 0$. De plus, on a :

☐ $g'(x_0) = -\dfrac{\pi}{2}$

☐ $g'(x_0) = \dfrac{\pi}{2}$

☐ $g'(x_0) = -\dfrac{1}{2}$

■ $g'(x_0) = \dfrac{1}{2}$

Question 12 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\right\}$ et soit la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{1 - x + y + xy}\,.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0,0)$ est :

- ■ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - 3xy + y^2$
- □ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - 2xy + y^2$
- □ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - \;\; xy + y^2$
- □ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - 4xy + y^2$

Question 13 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 5xy\,.$$

Alors :

- □ f admet un minimum local en $(0,0,0)$
- ■ f n'admet pas d'extremum local en $(0,0,0)$
- □ $(0,0,0)$ n'est pas un point stationnaire de f
- □ f admet un maximum local en $(0,0,0)$

Question 14 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3y^3$$

et soit $g(x,y) = x^4 + 16y^4 - 32$. Alors, sous la contrainte $g(x,y) = 0$,

- □ la fonction f atteint son maximum absolu en exactement 4 points
- ■ la fonction f atteint son minimum absolu en $(-2,1)$
- □ la fonction f atteint son minimum absolu en un seul point
- □ la fonction f atteint son maximum absolu en $\left(\sqrt[4]{7}\,,\ \sqrt{5}/2\right)$

Question 15 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,,\ |y| \leq \min\{1, 2-x\}\right\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D xy^2\,dx\,dy$$

vaut :

- □ $\dfrac{2}{15}$
- □ $\dfrac{16}{15}$
- ■ $\dfrac{8}{15}$
- □ $\dfrac{4}{15}$

Question 16 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1+y^{20}}\,dy\right) dx$ vaut :

- □ $\dfrac{\mathrm{Log}(2)}{38}$
- ■ $\dfrac{\mathrm{Log}(2)}{760}$
- □ $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{10}$
- □ $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{10}$

Question 17 Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\,,\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; z \leq 0\}$.
Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dx\, dy\, dz$$

vaut :

- ☐ $-\dfrac{4}{5}$
- ■ $-\dfrac{31}{40}$
- ☐ 0
- ☐ $-\dfrac{31}{30}$

Question 18 Soit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_0^{t^2} e^{te^x}\, dx\,.$$

Alors on a :

- ☐ $F'(1) = 4e^e - e$
- ☐ $F'(1) = 2e^e - e$
- ■ $F'(1) = 3e^e - e$
- ☐ $F'(1) = e^e - e$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 19 Si y_1 et y_2 sont deux solutions sur un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \cos(y) = 0$, alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution de cette équation sur I.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 20 Soit $(\boldsymbol{x}_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|\boldsymbol{x}_k\| = 1$ pour tout $k \geq 1$.
Alors il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ et $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 21 Soient $(\boldsymbol{u}_k)_{k\geq 1}$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ deux suites dans $\mathbb{R}^n$.
Si $(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ est une suite convergente alors $(\boldsymbol{u}_k)_{k\geq 1}$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ convergent aussi.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 22 Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(\boldsymbol{a}_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Si $\lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = 1$, alors $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 1$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 23 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $\overline{E}$ son adhérence. Si $E = \overline{E}$, alors la frontière de E est vide.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 24 Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 1 + y^2 + z^2\}$. Si $f\colon D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur D, alors f est bornée.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 25 Soit une fonction $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ existent pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, alors $\boldsymbol{f}$ est différentiable en $\boldsymbol{a}$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 26 Si la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet en $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ un minimum local, alors la fonction $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ admet en $\boldsymbol{a}$ un maximum local.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 27 Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, alors $\displaystyle\int_D e^{x^2}\, dx\, dy \leq \pi e$.

■ VRAI □ FAUX

Question 28 Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide, fermé et borné et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$-\int_D \left|f(\boldsymbol{x})\right| d\boldsymbol{x} \;\leq\; \int_D f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \;\leq\; \int_D \left|f(\boldsymbol{x})\right| d\boldsymbol{x}$$

si les intégrales existent.

■ VRAI □ FAUX