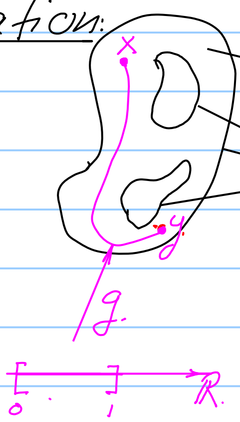
Démonstration:



$C \subset \mathbb{R}^n$ compact, convexe par arc

les bords sont inclus dans C

puisque C est convexe par arc il existe $g : [0,1] \to C$, continue, telle que $g(0) = x$ et $g(1) = y$.

Soit $x, y \in C$ tels que $f(x) = m$ et $f(y) = M$ et soit $g : [0,1] \longrightarrow C$ un chemin qui relie x à y, c.-a-d. tel que $g(0) = x$ et $g(1) = y$. Puisque f et g sont continues, la fonction $h = f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, $h(0) = m$, $h(1) = M$ et h prend donc toutes les valeurs dans l'intervalle $[m, M]$ (voir Analyse I)

Conséquence: f prend toutes les valeurs dans $[m, M]$ sur toute courbe dans C qui relie x a y.

Théorème Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact, $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint ses extremums

i) dans $\underbrace{\text{l'intérieur de } C}_{\equiv \mathring{C}}$ en un point stationnaire

ii) dans l'intérieur de C en un point où f n'est pas differentiable

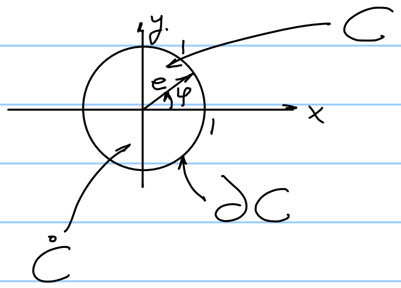
iii) sur le bord ($\equiv$ la frontière) de C $(\equiv \partial C)$

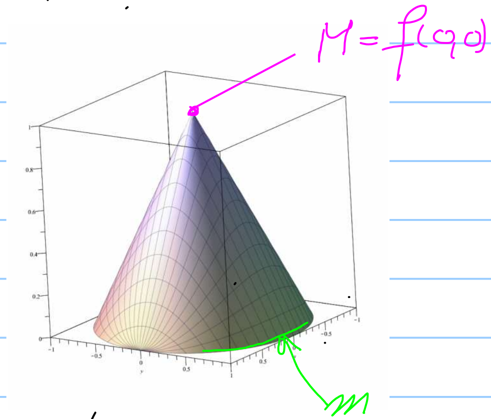
Attention! si $\nabla f(x_0) = 0$ pour x_0 un point dans l'intérieur de C, alors x_0 est de type i) ou ii), selon si f est differentiable en x_0 ou pas.

9.5.2. Exemples, $n=2$ (discussion de fonctions)

1) $f(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ sur $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

$\boxed{f \text{ est continue sur } C \text{, car } f \text{ continue sur } \mathbb{R}^2}$





i) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^T$ existe sur $B(0,1)\setminus\{(0,0)\}$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) \neq (0,0)^T$

$\Rightarrow$ pas de points stationnaires

ii) en $(0,0)$ la fonction n'est pas différentiable (sinon le gradient y serait bien défini).

$$\boxed{f(0,0) = 1}$$

iii) pour les points du bord on a $x^2+y^2=1$ et $\boxed{f(\text{point du bord}) = 0}$. La fonction f admet donc le minimum en ces points

<u>Conclusions de i) – iii)</u>

- le maximum de f est M
- le minimum de f est $m = 0$
- $f : C \xrightarrow{\text{surjective}} [0,1] = [m, M]$ car C est compact et connexe par arc, et f est continue sur C.

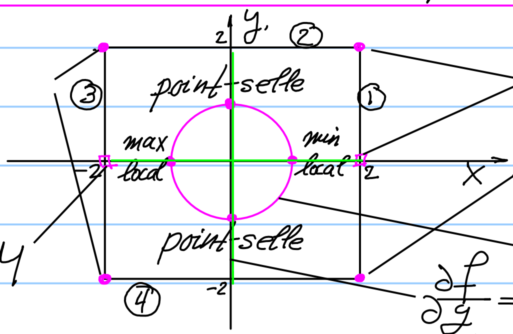
2) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x$ sur

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$

$\boxed{f \text{ continue sur } C \text{ car } f \text{ continue sur } \mathbb{R}^2.}$

minimum en ces points

candidat pour M



candidat pour m.

maximum en ces points

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur le cercle

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

i) $\nabla f(x,y) = (x^2+y^2-1,\ 2xy)^T \overset{!}{=} \binom{0}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ 2xy=0 \end{cases}$

les points stationnaires sont :
$\{(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)\}$.

$\boxed{f(1,0) = -\frac{2}{3}}$, $\boxed{f(0,\pm 1) = 0}$, $\boxed{f(-1,0) = \frac{2}{3}.}$

ii) f est differentiable car un polynôme (pas de points dans cette liste).

iii) quatres parties: $x=2;\ -2 \leq y \leq 2 :\ f(2,y) = \frac{2}{3} + 2y^2$ ①
$y=2;\ -2 \leq x \leq 2 :\ f(x,2) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$ ②
$x=-2;\ -2 \leq y \leq 2 :\ f(-2,y) = -\frac{2}{3} - 2y^2$ ③
$y=-2;\ -2 \leq x \leq 2 :\ f(x,-2) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$ ④

① valeur minimale en $y=0$: $\boxed{f(2,0) = \frac{2}{3}}$

valeur maximale en $y = \pm 2$: $\boxed{f(2,\pm 2) = \frac{26}{3}}$

② $\frac{d}{dx} f(x,2) = x^2 + 3 > 0$, $f(x,2)$ est croissante.

valeur minimale en $x=-2$: $\boxed{f(-2,2) = -\frac{26}{3}}$

valeur maximale en $x=2$: $\boxed{f(2,2)=\frac{26}{3}}$

③ voir ①, valeur minimale en $y=\pm 2$: $\boxed{f(-2,\pm 2)=-\frac{26}{3}}$

valeur maximale en $y=0$: $\boxed{f(-2,0)=-\frac{2}{3}}$

④ identique à ② : $\boxed{f(-2,-2)=-\frac{26}{3}}$, $\boxed{f(2,-2)=\frac{26}{3}}$

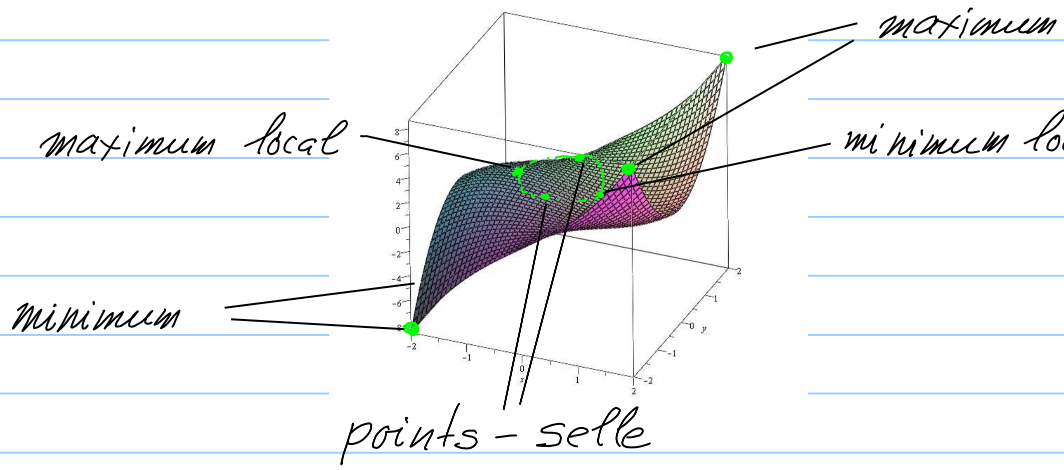
Discussion des points stationnaires (suite de i))

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} \boxed{2x} & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1=2x, \quad \Lambda_2=4(x^2-y^2)$$

$(1,0)$: $\Lambda_2=4>0$, $\Lambda_1=2>0 \Longrightarrow$ minimum local

$(-1,0)$: $\Lambda_2=4>0$, $\Lambda_1=-2<0 \Longrightarrow$ maximum local

$(0,\pm 1)$: $\Lambda_2=-4<0 \Longrightarrow$ points-selle



Conclusion: $m=-\frac{26}{3}$, $M=\frac{26}{3}$ (comparer les valeurs)

9.5.3. Remarques pour le cas $n>2$

- même procédure que pour $n=2$
- sur le bord on aura typiquement des fonctions de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$
- procéder d'une manière récursive

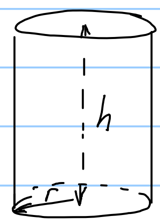
9.6. Extremums liés

La méthode (des multiplicateurs de Lagrange) permet de trouver des extremums d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (fonction objectif) sous contraintes (d'autre fonctions $g_1, \dots, g_m$, $1 \leq m \leq n-1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$).

9.6.1. Exemple

Trouver le cylindre de volume V donné et de surface minimale

$$V - \pi r^2 h \quad =: g(r,h) \overset{!}{=} 0$$
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad =: f(r,h)$$



Méthode 1: éliminer une des variables:

$$g(r,h) = 0 \iff h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad \text{(contrainte)}$$

$$S(r) = f\left(r, \frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + 2\pi \cdot r \frac{V}{\pi r^2}$$
$$= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow \boxed{r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (*)}$$

$$\Rightarrow S = 3 \cdot (2\pi)^{1/3} V^{2/3}$$ (et c'est bien un minimum car $S'' > 0$)

Méthode 2: fonction de Lagrange. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et

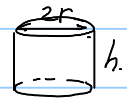
$$F(r,h,\lambda) := f(r,h) - \lambda\, g(r,h)$$
$$= 2\pi r^2 + 2\pi r h - \lambda\left(V - \pi r^2 h\right)$$

On cherche des points stationnaires de F $(\nabla F = 0)$.

$$\nabla F(r,h,\lambda) = \Big(\underbrace{4\pi r + 2\pi h + \lambda 2\pi r h}_{①}, \underbrace{2\pi r + \lambda \pi r^2}_{②}, \underbrace{-(V - \pi r^2 h)}_{③}\Big)^T$$
$$= (0,0,0)^T$$

$$② \Longrightarrow \lambda = -\frac{2}{r} \overset{}{\underset{①}{\Longrightarrow}} 4\pi r + 2\pi h - \frac{2}{r}\, 2\pi r h = 0$$

$$\Rightarrow 4\pi r - 2\pi h = 0 \Rightarrow h = 2r$$



$$\underset{③}{\Rightarrow} V = \pi r^2 (2r) \Rightarrow r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$ (on retrouve (*))

9.6.2. Théorème des multiplicateurs de Lagrange

Théorème (condition nécessaire pour un extremum lié)

Soient les fonctions $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, de classe C^1 et un point (x_0, y_0) tel que $g(x_0,y_0) = 0$ et $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$ (*). Si f admet en (x_0,y_0) un extrémumum sous la contrainte g (c'est-à-dire on réduit l'étude de f aux points (x,y) tels que $g(x,y)=0$), alors il existe un nombre $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction de Lagrange

$$F : D \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,\lambda) \longmapsto f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

soit stationnaire en (x_0, y_0, λ_0).

Remarque: $\nabla F(x_0,y_0,\lambda_0) = 0 \iff$

$$\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}_{①}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}_{②}, \underbrace{-g(x_0,y_0)}_{③}\Big)^T$$
$$= (0,0,0)^T$$

$$\left.\begin{matrix} ① = 0 \\ ② = 0 \end{matrix}\right\} \iff \nabla f(x_0,y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0,y_0) \quad \text{pour un } \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

③ $= 0$ la contrainte.

Généralisation à $m < n$ contraintes $g_1, \dots, g_m$

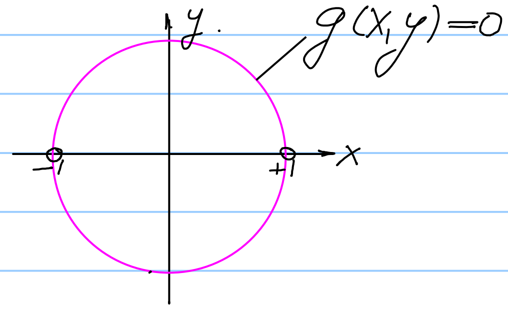
$$F : D \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$
$$(\underline{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \longmapsto f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\underline{x})$$

$\underline{x}_0$ t.q. $g_i(\underline{x}_0) = 0$, $i = 1 \dots m$ et $(\nabla g_i)(\underline{x}_0)$ $i = 1 \dots m$ (*) linéairement indép.

Contre-exemple (au théorème sans (*))

$f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = x \,,\; g(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$



$g(x,y)=0$ la contrainte

$(\Leftrightarrow \; x^2+y^2=1)$

$f(1,0)=1$ (maximum sous contrainte)

$f(-1,0)=-1$ (minimum sous contrainte)

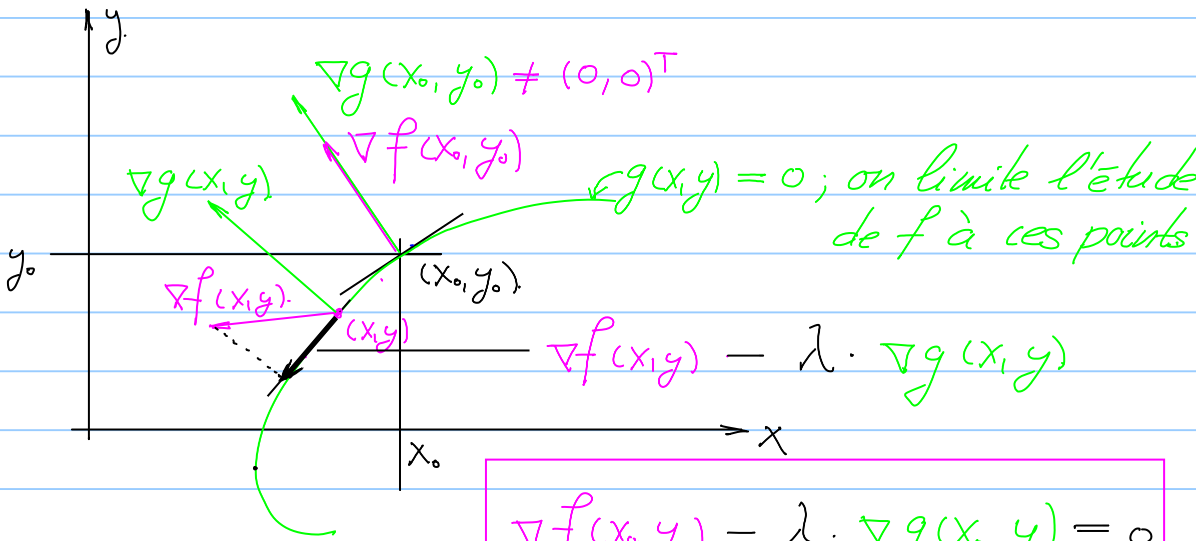
$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y) = x - \lambda (x^2+y^2-1)^2$$

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \Big(\underbrace{1-\lambda 4x(x^2+y^2-1)}_{①},\ \underbrace{\lambda \cdot 4y(x^2+y^2-1)}_{②},\ \underbrace{-(x^2+y^2-1)^2}_{③}\Big)^T$$

$$③ = 0 \;\Rightarrow\; x^2+y^2-1 = 0 \begin{cases} \Rightarrow ② = 0 \\ \Rightarrow ① = 1 \neq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \nabla F(x,y,\lambda) = (1,0,0)^T \neq (0,0,0)^T$ pour tous les points (x,y) tels que $g(x,y)=0$.

Démonstration du théorème



$$\boxed{\nabla f(x_0,y_0) - \lambda_0 \nabla g(x_0,y_0) = 0}$$

(*) $\Leftrightarrow$ le théorème des fonctions implicite s'applique