Peter Wittwer

Analyse avancée II – Série 14A

Échauffement. (Volume de la sphère)

Calculer le volume d'une sphère de rayon R en coordonnées sphériques et cylindriques.

Exercice 1. (Calcul de volume)

Déterminer le volume du solide délimité par la surface cylindrique $x^2 + z^2 = 1$ et les plans $x + y + z = 1$, $2y - z = 6$ et $z = 0$ tel que $z \geq 0$.

Exercice 2. (Calcul de volume)

Soit D le domaine délimité par l'extérieur du cône d'équation $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}z - 3\right)^2$ et l'intérieur de la sphère de rayon 5 centrée en $(0, 0, 1)$ (cf. Fig. 1). Calculer le volume de D.

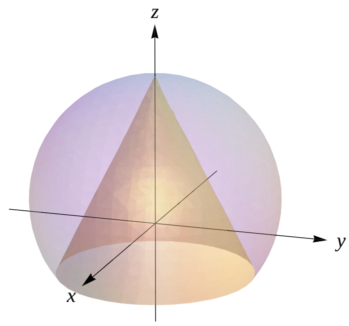

Fig. 1

Exercice 3. (Masse totale)

Soit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1,\ y \leq z \leq 1\}.$$

Calculer la masse totale de D, si la densité de masse $\rho\colon D \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$\rho(x, y, z) = z^{7/2}\, e^{-y^{3/2} z^{3/2}}.$$

Ex. 4 - 7 au verso.

Exercice 4. (Centre de gravité I) Pour le domaine D représenté à la Fig. 2 ci-dessous, déterminer le centre de gravité G si la densité de masse $\rho\colon D \to \mathbb{R}$ est $\rho(x,y,z) = 4x^2$.

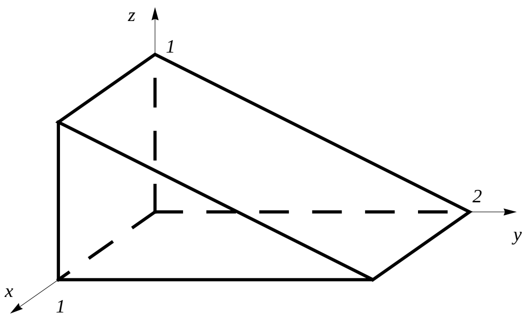

Fig. 2

Exercice 5. (Centre de gravité II)

Trouver la coordonnée z du centre de gravité du secteur sphérique représenté à la Fig. 3 ci-dessous en supposant que la densité de masse est proportionnelle à la distance à l'origine.

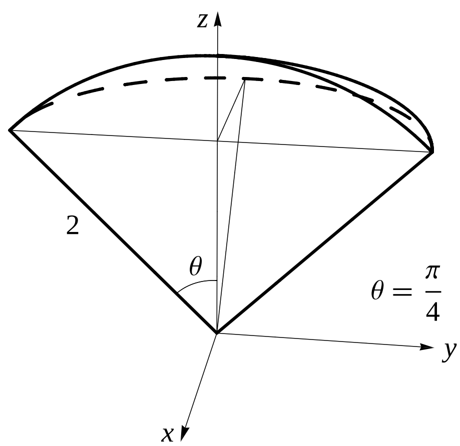

Fig. 3

Exercice 6. (Intégrale sur un tore)

Calculer l'intégrale triple $\displaystyle\int_D z^2\,dx\,dy\,dz$ où D est le tore solide engendré par la rotation du cercle $(x-a)^2+z^2=b^2$, $y=0$ $(0<b<a)$ autour de l'axe z.

Exercice 7. (Exponentielle d'une matrice)

i) Trouver l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Trouver la solution $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^\top$ du problème de Cauchy $y' = Ay$, $y(0) = (1,1)^\top$.