Analyse avancée II – Corrigé de la Série 14A

Échauffement.

En coordonnées sphériques: Voir le cours.
En coordonnées cylindriques: Voir le cours pour trouver l'intégrale. Ensuite on la calcule :

$$V = 2\pi \int_{-R}^{R} \left(\int_{0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr \right) dz = 2\pi \int_{-R}^{R} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} dz = 2\pi \int_{-R}^{R} \frac{R^2-z^2}{2}\,dz$$
$$= 2\pi \left[\frac{R^2 z}{2} - \frac{z^3}{6} \right]_{z=-R}^{z=R} = 2\pi \left(\frac{R^3}{3} - \left(-\frac{R^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi R^3}{3} \,.$$

Exercice 1.

Le volume cherché V est donné par une intégrale triple sur le domaine représenté à la Fig. 1 ci-dessous. Observons que le domaine est défini par les inégalités suivantes :

$$x^2 + z^2 \leq 1\,, \qquad x + y + z \geq 1\,, \qquad 2y - z \leq 6 \qquad \text{et} \qquad z \geq 0\,.$$

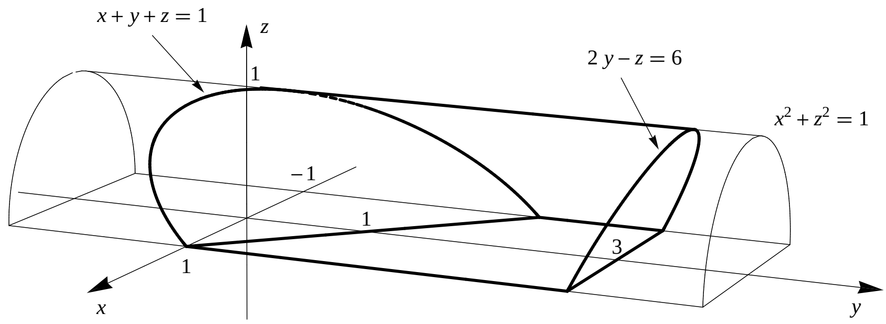

Fig. 1

A partir de ces contraintes (et en regardant la Fig. 1), on trouve que les bornes de l'intégrale triple sont

$$-1 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \qquad \text{et} \qquad 1 - x - z \leq y \leq 3 + \frac{z}{2}\,.$$

On a donc

$$V = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{1-x-z}^{3+\frac{z}{2}} dy \right) dz \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(3 + \frac{z}{2} - (1 - x - z) \right) dz \right) dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(2 + x + \frac{3}{2} z \right) dz \right) dx = \int_{-1}^{1} \left[(2+x)z + \frac{3}{4} z^2 \right]_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left((2+x)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4}(1-x^2) \right) dx = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx + \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx\,,$$

où la dernière égalité est justifiée par le fait que la fonction $x\sqrt{1-x^2}$ est impaire et donc son intégrale entre -1 et 1 est nulle.
Pour la première intégrale, on pose le changement de variable $x = \varphi(t) = \sin(t)$ si bien que $\varphi'(t) = \cos(t)$ et la nouvelle variable t varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On trouve alors

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varphi(t)^2} \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\, dt$$

qu'on intègre par parties avec $f'(t) = g(t) = \cos(t)$:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\, dt &= \Big[\sin(t)\cos(t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2\, dt = 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos(t)^2\big)\, dt \\ &= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\, dt\,.\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\, dt = \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$V = 2\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = \pi + \frac{3}{4}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \pi + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = \pi + 1\,.$$

Exercice 2.

On utilise les coordonnées cylindriques (r,φ,z) définies par $G : \widetilde{D} \to D$ telle que

$$(x,y,z) = G(r,\varphi,z) = \big(\, r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi),\ z\,\big).$$

Le Jacobien est donc

$$J_G(r,\varphi,z) = \det\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = r\,.$$

Les équations du cône $x^2+y^2 = \big(\frac{1}{2}z-3\big)^2$ et de la sphère $x^2+y^2+(z-1)^2 = 25$ s'écrivent en coordonnées cylindriques comme $r^2 = \big(\frac{1}{2}z-3\big)^2$ et $r^2+(z-1)^2 = 25$. A l'extérieur du cône on a alors $r^2 \geq \big(\frac{1}{2}z-3\big)^2$ et à l'intérieur de la sphère on a $r^2+(z-1)^2 \leq 25$. En combinant ces deux équations on obtient

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}z-3\right)^2 + (z-1)^2 \leq 25 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{4}z^2 - 3z + 9 + z^2 - 2z + 1 \leq 25 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5}{4}z^2 - 5z - 15 \leq 0\\ &\Leftrightarrow\quad z^2 - 4z - 12 \leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (z+2)(z-6) \leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad z \geq -2 \quad\text{et}\quad z \leq 6\,.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\widetilde{D} = \Big\{(r,\varphi,z)\ :\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,,\ 3 - \tfrac{1}{2}z \leq r \leq \sqrt{25-(z-1)^2}\,,\ \ -2 \leq z \leq 6\Big\}$$

et le volume est donc

$$\int_D dx\,dy\,dz = \int_{\widetilde{D}} |J_G(r,\varphi,z)|\,dr\,d\varphi\,dz = \int_{-2}^{6}\left(\int_{3-\frac{z}{2}}^{\sqrt{25-(z-1)^2}}\left(\int_0^{2\pi} r\,d\varphi\right)dr\right)dz$$
$$= 2\pi\int_{-2}^{6}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{3-\frac{z}{2}}^{\sqrt{25-(z-1)^2}} dz = \pi\int_{-2}^{6}\left(15+5z-\frac{5}{4}z^2\right)dz$$
$$= 5\pi\left[3z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{12}z^3\right]_{-2}^{6} = 5\pi\left(24+16-\frac{56}{3}\right) = \frac{320\pi}{3}\,.$$

Comme illustration, l'intersection de D avec le plan $x=0$ est représentée à la Fig. 2.

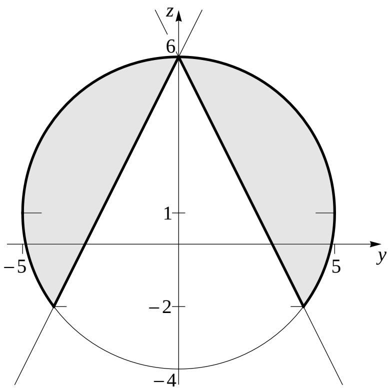

Fig. 2

Exercice 3.

La masse totale du domaine D est donnée par l'intégrale triple

$$I = \int_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Le domaine est donné par les inégalités

$$0 \le x \le 1\,,\qquad x^2 \le y \le 1 \qquad \text{et} \qquad y \le z \le 1\,,$$

et l'intégrale triple peut donc être exprimée par des intégrales itérées

$$I = \int_0^1\left(\int_{x^2}^1\left(\int_y^1 z^{7/2}\;e^{-y^{3/2}z^{3/2}}\,dz\right)dy\right)dx\,.$$

Pour faciliter l'intégration, on change l'ordre d'intégration. Il faut donc récrire les inégalités en changeant le sens de parcours des régions définies par les deux dernières inégalités (cf. Fig. 3). Les nouvelles inégalités décrivant le domaine D sont

$$0 \le z \le 1\,,\qquad 0 \le y \le z \qquad \text{et} \qquad 0 \le x \le \sqrt{y}\,.$$

L'intégrale triple peut donc aussi être exprimée en terme des intégrales itérées suivantes :

$$I = \int_0^1\left(\int_0^z\left(\int_0^{\sqrt{y}} z^{7/2}\;e^{-y^{3/2}z^{3/2}}\,dx\right)dy\right)dz\,.$$

$$0 \le x \le \sqrt{y}$$

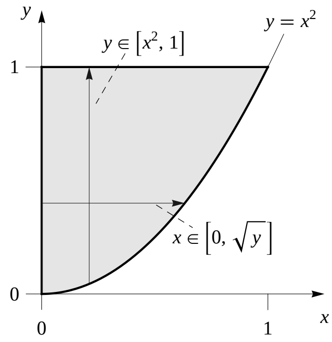

Fig. 3

On a successivement

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^z \left[z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} x \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^z z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \sqrt{y}\ dy \right) dz$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^z z^{7/2} \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{z^{3/2}} \right) \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{2} z^{3/2} y^{1/2} \right) e^{-y^{3/2} z^{3/2}}}_{=\varphi'(y) \exp(\varphi(y))} dy \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{2}{3} \frac{1}{z^{3/2}} \left(z^{7/2}\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \right) \right]_{y=0}^{y=z} dz = -\frac{2}{3} \int_0^1 \left[z^2\ e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \right]_{y=0}^{y=z} dz$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^1 \left(z^2\ e^{-z^3} - z^2 \right) dz$$

et donc

$$I = -\frac{2}{3} \int_0^1 \left(z^2\ e^{-z^3} - z^2 \right) dz = -\frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3} e^{-z^3} - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^1 = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{9e}\ .$$

Exercice 4.

Des coordonnées indiquées sur la Fig. 2 de l'énoncé on déduit que le haut du domaine (partie grise sur la Fig. 4 ci-dessous) appartient au plan d'équation $y + 2z = 2$.
Ainsi les bornes du domaine D sont

$$0 \le x \le 1\,, \qquad 0 \le y \le 2 \qquad \text{et} \qquad 0 \le z \le \frac{2-y}{2}\ .$$

La masse totale I est donc

$$I = \int_D \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^2\, dz \right) dy \right) dx$$

$$= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^2\, dx \right) = 2 \left(\int_0^2 (2-y)\, dy \right) \left(\int_0^1 x^2\, dx \right)$$

$$= 2 \cdot \left[2y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^2 \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\,.$$

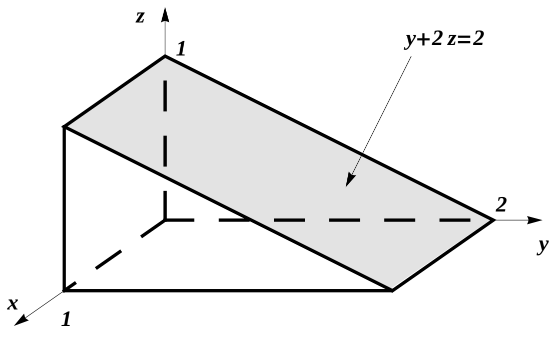

Fig. 4

Le centre de gravité est alors $G = \left(\frac{I_1}{I}, \frac{I_2}{I}, \frac{I_3}{I}\right)$, où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_D x \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^3\,dz \right) dy \right) dx \\
&= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^3\,dx \right) = 4 \cdot \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_D y \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^2 y\,dz \right) dy \right) dx \\
&= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} y\,dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^2\,dx \right) = 2 \left(\int_0^2 y(2-y)\,dy \right) \cdot \frac{1}{3} \\
&= 2 \cdot \left[y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^2 \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_D z \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^2 z\,dz \right) dy \right) dx \\
&= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} z\,dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^2\,dx \right) = 4 \left(\int_0^2 \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{(2-y)/2} dy \right) \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 (2-y)^2\,dy \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}(2-y)^3 \right]_0^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi le centre de gravité est $G = \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Exercice 5.

Soit D le secteur sphérique représenté à la Fig. 3 de l'énoncé. Comme le domaine D est un secteur sphérique, on utilise les coordonnées sphériques $G : \widetilde{D} \to D$ telles que

$$(x,y,z) = G(r,\theta,\varphi) = \big(r\sin(\theta)\cos(\varphi),\ r\sin(\theta)\sin(\varphi),\ r\cos(\theta) \big)$$

et donc le Jacobien de ce changement de coordonnées est

$$J_G(r,\theta,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} = r^2\sin(\theta)\,.$$

Sur la Fig. 3 de l'énoncé on voit que le domaine d'intégration $\widetilde{D}$ est défini par

$$0 \leq r \leq 2\,, \qquad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\,.$$

Comme la densité de masse est proportionnelle à la distance à l'origine (notons qu'une éventuelle constante de proportionnalité s'annule dans le calcul du centre de gravité), elle est $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et son analogue exprimé en coordonnées sphériques est $\bar{\rho}(r,\theta,\varphi) = r$.
On calcule d'abord la masse totale I du domaine

$$\begin{aligned}
I &= \int_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\widetilde{D}} \bar{\rho}(r,\theta,\varphi)\,|J_G(r,\theta,\varphi)|\,dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 r^3 \sin(\theta)\,dr \right) d\theta \right) d\varphi = \left(\int_0^2 r^3\,dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta)\,d\theta \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \right) \\
&= \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^2 \cdot \Big[-\cos(\theta) \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \pi = 2\pi(2-\sqrt{2})\,.
\end{aligned}$$

Notons que $\sin(\theta) \geq 0$ pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et donc $|J_G(r,\theta,\varphi)| = r^2\sin(\theta)$ (sans valeur absolue).
La coordonnée z_G du centre de gravité de D est alors

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{I} \int_D z \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{I} \int_{\widetilde{D}} z(r,\theta,\varphi)\,\bar{\rho}(r,\theta,\varphi)\,|J_G(r,\theta,\varphi)|\,dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= \frac{1}{I} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 r\cos(\theta) \cdot r^3 \sin(\theta)\,dr \right) d\theta \right) d\varphi \\
&= \frac{1}{I} \left(\int_0^2 r^4\,dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \right) = \frac{1}{I} \cdot \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \sin(\theta)^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \pi \\
&= \frac{1}{I} \cdot \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{1}{2\pi(2-\sqrt{2})} \cdot \frac{8\pi}{5} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{5}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 6.

La construction du tore D implique que son grand rayon est a est son petit rayon est b. Pour intégrer sur D on utilise les coordonnées curvilignes (t,β,φ) définies par $G : \widetilde{D} \to D$ telles que

$$(x,y,z) = G(t,\beta,\varphi) = \big((a + t\cos(\beta))\cos(\varphi),\ (a+t\cos(\beta))\sin(\varphi),\ t\sin(\beta) \big) \qquad \text{(Fig. 5)}$$

Le Jacobien de ce changement de coordonnées est

$$J_G(t,\beta,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\varphi) & -t\sin(\beta)\cos(\varphi) & -(a+t\cos(\beta))\sin(\varphi) \\ \cos(\beta)\sin(\varphi) & -t\sin(\beta)\sin(\varphi) & (a+t\cos(\beta))\cos(\varphi) \\ \sin(\beta) & t\cos(\beta) & 0 \end{pmatrix} = -t(a+t\cos(\beta))$$

et on a $|J_G(t,\beta,\varphi)| = t(a+t\cos(\beta))$ parce que $a > t$ et donc le terme dans la parenthèse est positif. Puisque

$$\widetilde{D} = \{(t,\beta,\varphi) \,:\, 0 \leq t \leq b\,,\ 0 \leq \beta \leq 2\pi\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}\,,$$

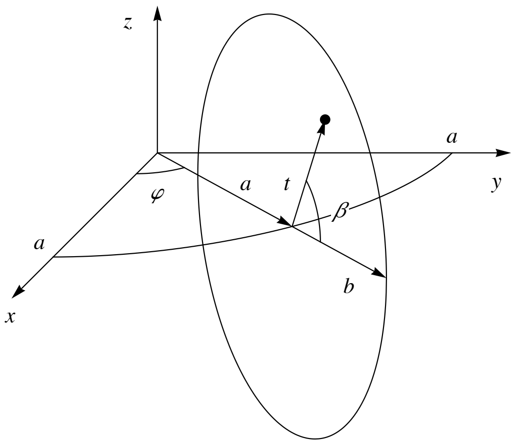

Fig. 5

l'intégrale devient

$$
\begin{aligned}
I &= \int_D z^2\,dx\,dy\,dz = \int_{\widetilde{D}} z(t,\beta,\varphi)^2\,|J_G(t,\beta,\varphi)|\;dt\,d\beta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^b \big(t\sin(\beta)\big)^2\cdot t\big(a+t\cos(\beta)\big)\,dt\right)d\beta\right)d\varphi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi}\left(\sin(\beta)^2\int_0^b \big(at^3+t^4\cos(\beta)\big)\,dt\right)d\beta\right) \\
&= 2\pi\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\left(\frac{1}{4}ab^4+\frac{1}{5}b^5\cos(\beta)\right)d\beta \\
&= \frac{\pi}{2}ab^4\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta+\frac{2\pi}{5}b^5\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\cos(\beta)\,d\beta \\
&= \frac{\pi}{2}ab^4\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta+\frac{2\pi}{5}b^5\left[\frac{1}{3}\sin(\beta)^3\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}ab^4\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta\,.
\end{aligned}
$$

En intégrant la dernière intégrale par parties on trouve

$$
\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta = \Big[-\cos(\beta)\sin(\beta)\Big]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos(\beta)^2\,d\beta = 2\pi-\int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta
$$

$$
\Rightarrow\quad \int_0^{2\pi}\sin(\beta)^2\,d\beta = \pi
$$

et donc $I = \dfrac{\pi^2ab^4}{2}$.

Exercice 7. (Exponentielle d'une matrice)

i) On peut écrire $A = I+N$, où $I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ est la matrice identité et $N = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente. En effet $N^2=0$. Il s'ensuit que $A^2 = I+2N$ et par recurrence on peut prouver que $A^k = I+kN$. Prenant $x\in\mathbb{R}$ on a, par la définition d'exponentielle de matrice,

$$
e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Ax)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}(I+kN) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}I + x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}N
$$

$$=e^x I + xe^x N = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

ii) On résout l'exercice avec deux méthodes différentes.
Méthode 1: Par l'expenentielle d'une matrice.
Vu que la matrice e^{Ax} satisfait l'equation $(e^{Ax})' = Ae^{Ax}$ alors la solution du problème est donnée par $y(x) = e^{Ax}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x + xe^x \\ e^x \end{pmatrix}$.
Méthode 2: L'équation à résoudre peut être écrite

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned}$$

et donc y_2 est indépendante de y_1 et on trouve facilement $y_2(x) = y_2(0)e^x = e^x$. En utilisant ceci dans l'équation pour y_1 on a $y_1' - y_1 = e^x$. Utilisant la méthode des coefficients indéterminés on trouve $y_1(x) = Ce^x + xe^x$ et avec la condition initiale $y_1(0) = 1$ on trouve $C = 1$, donc $y_1(x) = e^x + xe^x$.