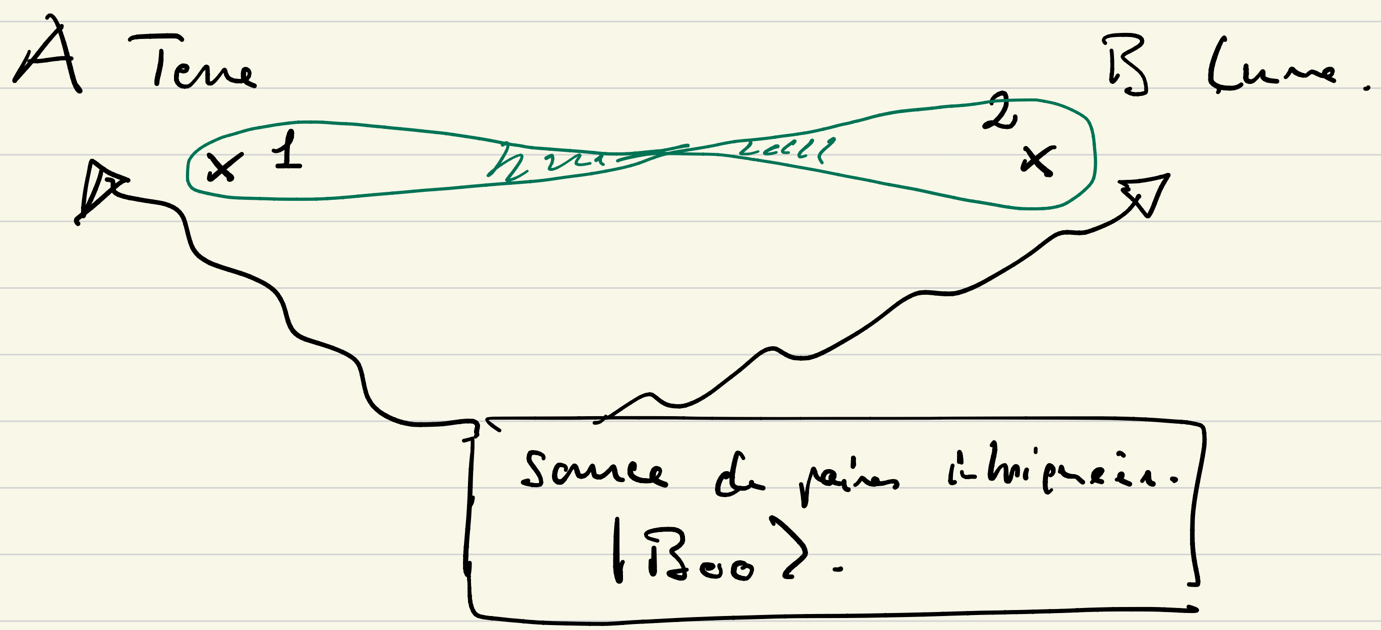
Intrication : Protocole de Codage Superdense.

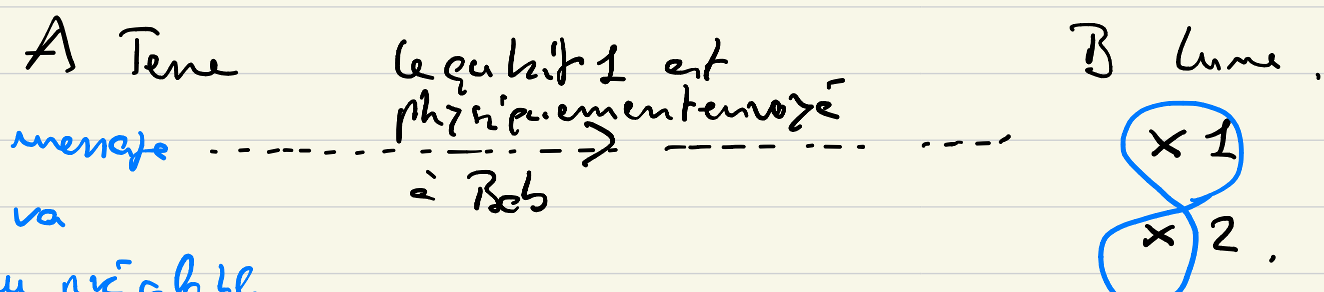
communication 2 bits classiques entre A et B en envoyant physiquement 1 bit quantique.

Il faut que A et B partage une paire intriquée.

00
01
10
11



Selon le message (ij) A va faire au préalable faire op de mesure appropriées.



paire intriquée appropriée.

(ij)

↪ $\boxed{\text{Mesure finale}}$.

1) Une paire intriquée est partagée par A et B.

l'état de la paire est supposé être

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\underbrace{|0\rangle_1}_{A} \otimes \underbrace{|0\rangle_2}_{B} + \underbrace{|1\rangle_1}_{A} \otimes \underbrace{|1\rangle_2}_{B}\Big).$$

2) A veut envoyer 2 bits classiques à Bob :

00 ; 01 ; 10 ; 11.

a) Si $\overbrace{\text{envoyer}}^{\text{on veut}}$ <u>00</u> : A envoie <u>le qubit 1</u> à B.

et B reçoit quoi ? Il possède

l'état <u>$|B_{00}\rangle$</u> dans son

laboratoire.

b) Si A veut envoyer **<u>01</u>** : tout d'abord elle applique

l'unitaire $U = \underbrace{X_1}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \otimes \underbrace{I_2}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$. ← B ne fait rien.

chez Alice

$X_1|0\rangle = |1\rangle$
$X_1|1\rangle = |0\rangle$.

⟶

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\otimes|0\rangle + |1\rangle\otimes|1\rangle\right).$$
$$\|$$

L'état $|B_{00}\rangle$ toujours partagé par A et B

devient

$$\underline{X_1 \otimes I_2}\,|B_{00}\rangle = X_1 \otimes I_2 \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2\right)$$

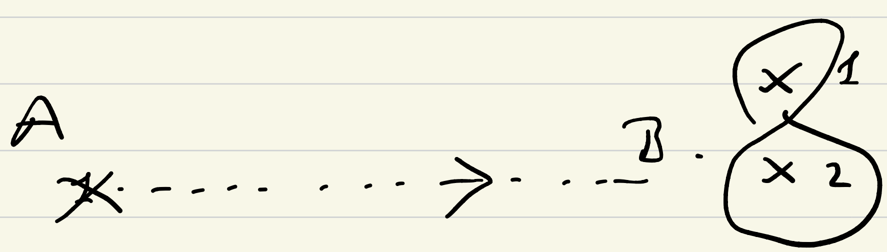
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{X_1|0\rangle_1}\otimes\underbrace{I_2|0\rangle_2} + \underbrace{X_1|1\rangle_1}\otimes\underbrace{I_2|1\rangle_2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{|1\rangle_1\otimes|0\rangle_2 + |0\rangle_1\otimes|1\rangle_2}\right)$$

$$= \underbrace{|B_{01}\rangle}.$$

cet état est toujours pour le moment partagé par A et B.

Maintenant A envoie physiquement le qubit 1 à B qui le reçoit et qui possède donc



$$\underline{\underline{|B_{01}\rangle.}}$$

c) A veut envoyer 10 : elle applique d'abord

l'unitaire $\quad U = \underbrace{Z_1}_{\text{c'est Alice}} \otimes \underbrace{I_2}_{\text{Bob ne fait rien.}}$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} Z_1 |0\rangle = \underline{|0\rangle} \\ Z_1 |1\rangle = \underline{-|1\rangle}. \end{cases}$$

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$Z_1 \otimes I_2 \, |B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(Z_1 \otimes I_2 \, |0\rangle \otimes |0\rangle + Z_1 \otimes I_2 \, |1\rangle \otimes |1\rangle \Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle \Big).$$

$= |B_{10}\rangle$ par déf. troisième état de Bell.

Maintenant A envoie son qubit 1 à B qui <u>le reçoit</u> et possède donc l'état de Bell $\underline{\underline{|B_{10}\rangle}}$ dans sa globalité.

d) A veut envoyer le message 11 : elle opère sur son qubit avec l'unitaire $Z_1 X_1$ c.à.d. l'état partagé de départ $|B_{00}\rangle$ devient :

$$\underbrace{Z_1 X_1}_{\text{chez } A} \otimes \underbrace{I_2}_{\text{chez } B} |B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\underbrace{Z_1 X_1 |0\rangle}_{A} \otimes \underbrace{|0\rangle}_{B} + \underbrace{Z_1 X_1 |1\rangle}_{A} \otimes \underbrace{|1\rangle}_{B} \Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\underbrace{Z_1 |1\rangle}_{A} \otimes \underbrace{|0\rangle}_{B} + \underbrace{Z_1 |0\rangle}_{A} \otimes \underbrace{|1\rangle}_{B} \Big).$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(- |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle \Big)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle \Big)}.$$

$$= -|B_{11}\rangle. \underset{\text{phys equivalent à}}{\equiv} |B_{11}\rangle.$$

Maintenant A va envoyer son qubit 1 à B qui le reçoit et possède donc l'état $|B_{11}\rangle$ dans sa globalité -

Résumé :

Ops faites par A pour envoyer $(i,j) = 00 ; 01 ; 10 ; 11$.

00 : $I_1 \otimes I_2 |B_{00}\rangle = |B_{00}\rangle \rightsquigarrow$ envoie qubit 1 à B.

$|B_{00}\rangle$.

01 : $X_1 \otimes I_2 |B_{00}\rangle = |B_{01}\rangle \rightsquigarrow$ envoie qubit 1 à B :

$|B_{01}\rangle$.

10 : $Z_1 \otimes I_2 |B_{00}\rangle = |B_{10}\rangle \rightsquigarrow$ envoie qubit 1 à B :

$|B_{10}\rangle$.

11 : $Z_1 X_1 \otimes I_2 |B_{00}\rangle = -|B_{11}\rangle \rightsquigarrow$ envoie qubit 1 à B :

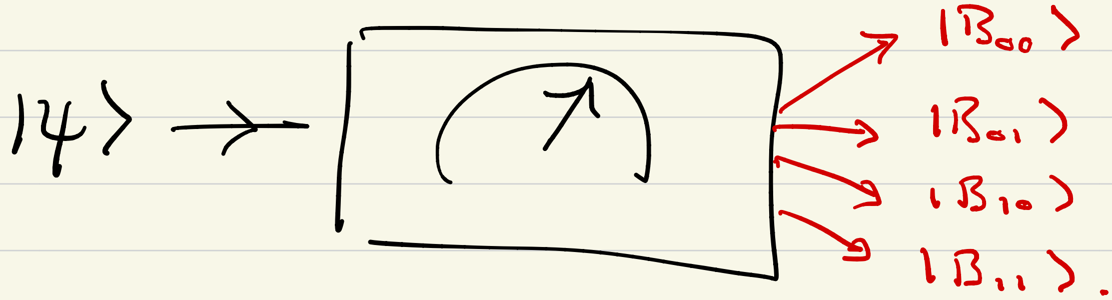
$X_1 Z_1 \otimes I_2 |B_{00}\rangle = |B_{11}\rangle$. $\quad |B_{11}\rangle$.

3) Phase finale du protocole : Bob doit "lire" l'information ou "l'extraire" des 4 états possibles $|B_{00}\rangle$, $|B_{01}\rangle$, $|B_{10}\rangle$, $|B_{11}\rangle$

$\longrightarrow$

Comment ? en faisant une mesure avec un appareil de mesure qui projette sur la base des états Bell.

$\underbrace{\text{états Bell}}$: base orthonormée de $\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2}$. dim $2 \times 2 = 4$.



$|\langle B_{00}|\psi\rangle|^2 = prob(00)$

$|\langle B_{01}|\psi\rangle|^2 = p(01)$

$|\langle B_{10}|\psi\rangle|^2 = p(10)$

$|\langle B_{11}|\psi\rangle|^2 = p(11)$.

$|B_{00}\rangle ; |B_{01}\rangle ; |B_{10}\rangle ; |B_{11}\rangle$

Application dans notre cas :

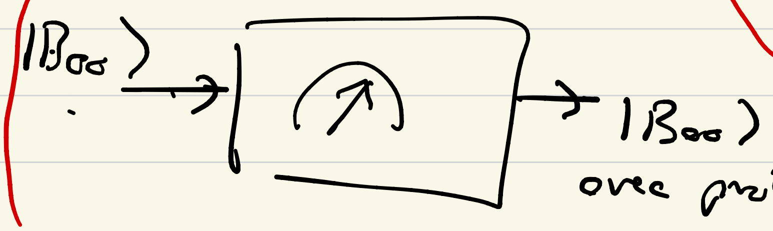
ici $|\psi\rangle$ est un des 4 états de Bell. Si bien que

p. ex si $|\psi\rangle = |B_{00}\rangle \Rightarrow prob(00) = |\langle B_{00}|B_{00}\rangle|^2 = 1$

$prob(01) = 0$

$prob(10) = 0$

$prob(11) = 0$.



avec $prob(00) = 1$

$\Rightarrow$ Bob sait donc que l'état en sa possession est $|B_{00}\rangle$ et il connaît le message **00**.

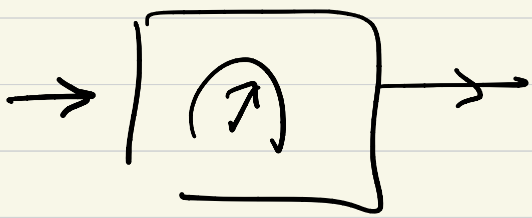
Si $|\psi\rangle = |B_{01}\rangle \Rightarrow \text{prob}(01) = |\langle B_{01}|\psi\rangle|^2$

$$= |\langle B_{01}|B_{01}\rangle|^2$$

$$= 1.$$

$$\text{prob}(00) = \text{prob}(10) = \text{prob}(11) = 0$$

$|B_{01}\rangle$



$|B_{01}\rangle$; $\text{prob}(01) = 1$

Base de Bell

Bob sait qu'il possède l'état $|B_{01}\rangle$ et connait le message 01.

Pour $|\psi\rangle = |B_{10}\rangle$ et $|B_{11}\rangle$ idem.

$\blacksquare$

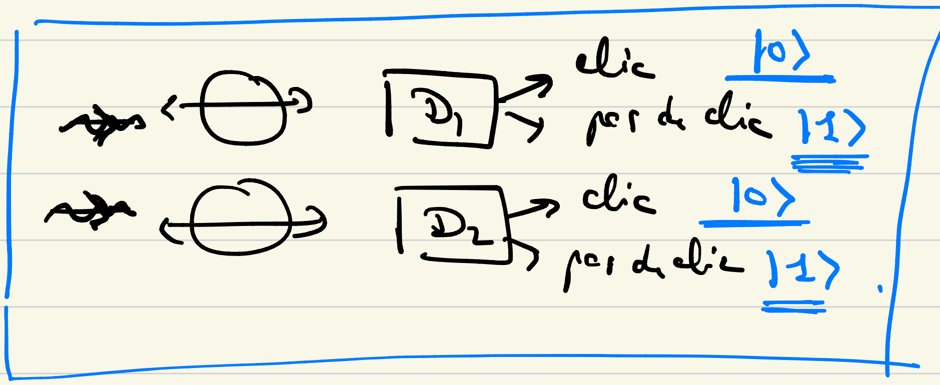
[Résumé du Protocole de la note de cours.].

Remarque : comment "construire un appareil de mesure qui mesure dans la base de Bell".

• Jusqu'à maintenant : base computationnelle c.à.d

$|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ pour $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

pol des photons



app de mesure pour la base computationnelle.

• Pour la base des états de Bell on remarque d'abord la construction suivante : $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\underbrace{(CNOT)}_{\text{Matrice } 4\times 4\,:\ \text{opération unitaire.}}\,(H \otimes I)\ |i\rangle \otimes |j\rangle = |B_{ij}\rangle.}$$

$$\boxed{CNOT\ \underset{\text{bit de contrôle}}{|x\rangle} \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |\underbrace{y \oplus x}_{\text{mod } 2.}\rangle \qquad \text{déf du CNOT}}$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Identités suivantes:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

$$(CNOT)(H\otimes I)|0\rangle\otimes|0\rangle = CNOT\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes|0\rangle\right\}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{CNOT\ |0\rangle\otimes|0\rangle}\ + CNOT\ |1\rangle\otimes|0\rangle\right).$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\otimes|0\rangle + |1\rangle\otimes|1\rangle\right).$$

$$= |B_{00}\rangle.$$

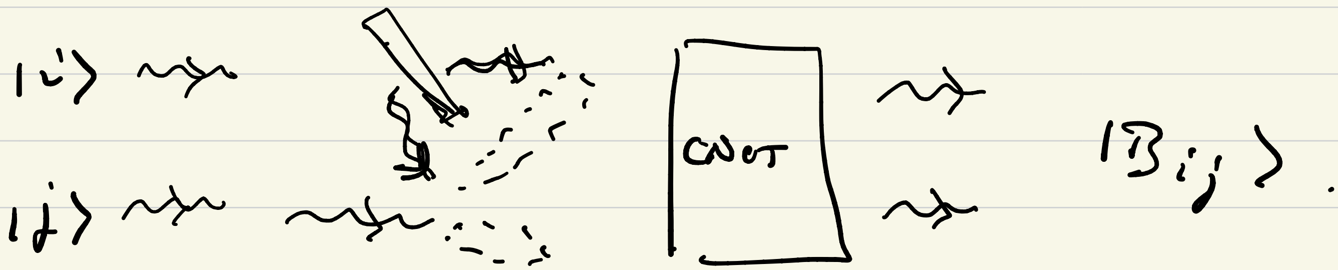
$$(CNOT)(H\otimes I)|0\rangle\otimes|1\rangle = |B_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$(CNOT)(H\otimes I)|1\rangle\otimes|0\rangle = |B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

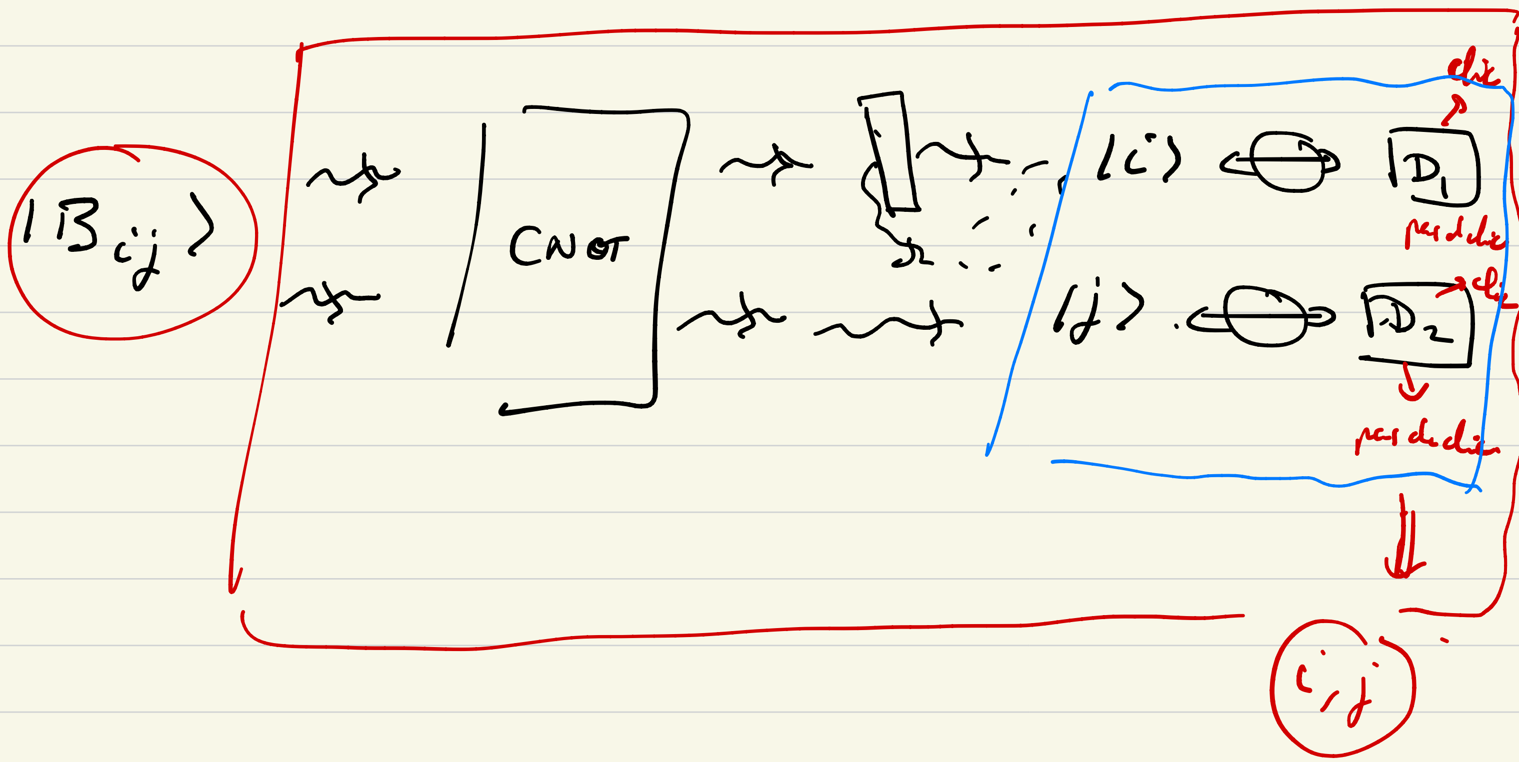
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$(CNOT)(H\otimes I)|1\rangle\otimes|1\rangle = |B_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle).$$



cristal non-linéaire.
optique.

$i, j \in \{0, 1\}$.

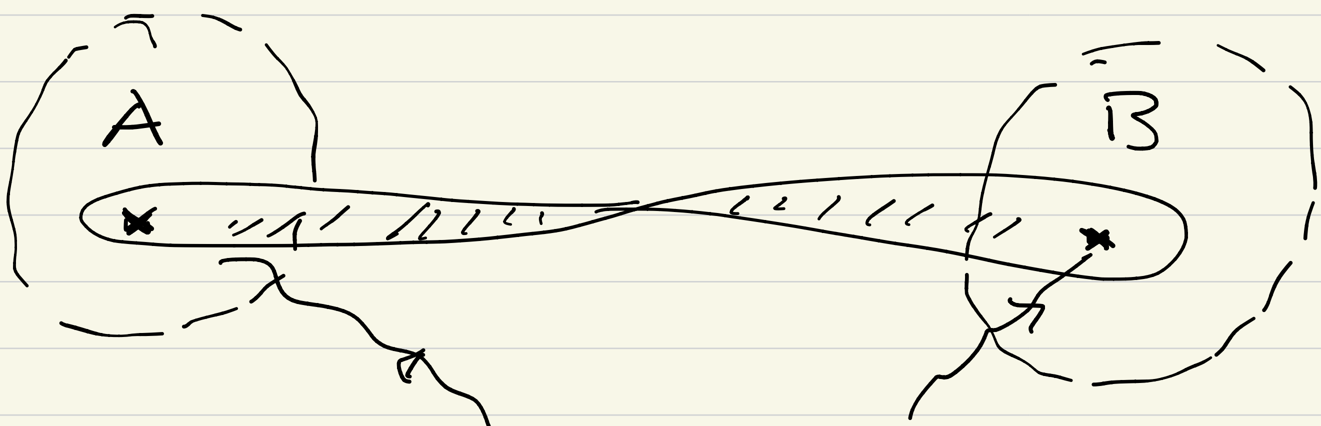


Aspects des états de Bell lorsque l'on fait des mesures.

↳ • faites localement et séparément chez A et B.

• aucune communication entre A et B

⇒ A et B ne peuvent absolument pas détecter l'intrication de l'état de Bell.

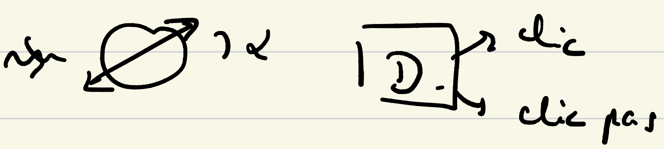


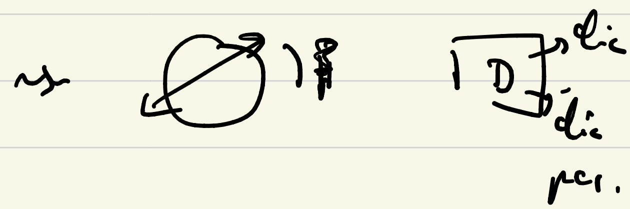
source $\underbrace{|B_{00}\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)}$.

a) Alice fait une mesure et Bob fait une mesure après, ...
b) Bob " " et Alice " " " " ...
c) Alice et Bob font leurs mesures simultanément ...

a) A mesure d'abord et B mesure après.

$\{|\alpha\rangle, |\alpha_\perp\rangle\}$. $\qquad$ $\{|\beta\rangle, |\beta_\perp\rangle\}$.





Rappel pol linéaire $\quad |\gamma\rangle = \cos\gamma\, |0\rangle + \sin\gamma\, |1\rangle$

$$|\gamma_\perp\rangle = -\sin\gamma\, |0\rangle + \cos\gamma\, |1\rangle.$$

Chez Alice : le photon va être projeté sur les états de base

$$\underline{|\alpha\rangle} \quad \text{ou} \quad \underline{|\alpha_\perp\rangle}.$$

prob $1/2$ $\qquad$ prob $1/2$.

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\gamma\gamma\rangle + |\gamma_\perp \gamma_\perp\rangle\right)$$

vérifier par calcul

$|\gamma\rangle \otimes |\gamma\rangle$.

<u>Par calcul</u> : projecteurs associés à l'opération de mesure

$$\underbrace{|\alpha\rangle\langle\alpha|}_{\text{proj chez } A} \otimes I_B \quad ; \quad |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| \otimes I_B .$$

<u>état après la mesure d'Alice</u> :

- $|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes I_B \, |B_{00}\rangle = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes I_B \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle + |\alpha_\perp\rangle \otimes |\alpha_\perp\rangle\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle .$$

chez A   chez B .

$$\xrightarrow[\text{après normalisation}]{} \underbrace{|\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle}_{\text{état la mesure}}$$

<u>Remarque</u> : en réalité B possède une partie de la paire mais ne connaît l'état de son photon. car A n'a pas encore fait d'chs.

- $|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| \otimes I_B \, |B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha_\perp\rangle \otimes |\alpha_\perp\rangle$

$$\longrightarrow \underbrace{|\alpha_\perp\rangle}_{\text{chez } A} \otimes \underbrace{|\alpha_\perp\rangle}_{\text{chez } B} .$$

$$\text{prob} = \left| \langle \text{état final} \mid \text{état initial} \rangle \right|^2 .$$

$$\begin{cases} |\text{état final}\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle . \\ \text{prob} = \left| \langle\alpha| \otimes \langle\alpha| \; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle + |\alpha_\perp\rangle \otimes |\alpha_\perp\rangle \right)}_{|\beta_{00}\rangle} \right|^2 . \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} .$$

$$\begin{cases} |\text{état final}\rangle = |\alpha_\perp\rangle \otimes |\alpha_\perp\rangle \\ \text{prob} = \frac{1}{2} . \end{cases}$$

<u>Bob fait sa mesure après Alice</u> :

↑ base $\{ |\beta\rangle , |\beta_\perp\rangle \}$

son état final sera $|\beta\rangle$ ou $|\beta_\perp\rangle$. Mais quelle est la probabilité ?

$$\text{prob}\,(|\beta\rangle \text{ chez } B) = \text{prob}\,(|\alpha\rangle \to |\beta\rangle \mid \text{chez } A\ |\alpha\rangle)\cdot\frac{1}{2}$$

transition chez Bob

$$+\ \text{prob}\,(|\alpha_\perp\rangle \to |\beta\rangle \mid \text{chez } A\ |\alpha_\perp\rangle)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\text{prob}\,(|\alpha\rangle \to |\beta\rangle) = |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = (\cos(\beta-\alpha))^2$$

$$|\alpha_\perp\rangle \to |\beta\rangle \qquad |\langle\beta|\alpha_\perp\rangle|^2 = (\sin(\beta-\alpha))^2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{prob}\,(|\beta\rangle \text{ chez } B) = (\cos(\beta-\alpha))^2\,\frac{1}{2} + (\sin(\beta-\alpha))^2\,\frac{1}{2} \\ \qquad = \frac{1}{2}. \\ \text{prob}\,(|\beta_\perp\rangle \text{ chez } B) = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

satisfaisant ! Car

$\boxed{\text{b) B fait Mes avant et A fait Mes après.}}$

$$\{|\beta\rangle,\ |\beta_\perp\rangle\} \qquad \{|\alpha\rangle,\ |\alpha_\perp\rangle\}.$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \nearrow & \nearrow \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2. \end{array}$$

$\boxed{\text{C) A et B font les mesures simultanément.}}$

$\{|\alpha\rangle, |\alpha_\perp\rangle\}$ $\{|\beta\rangle, |\beta_\perp\rangle\}$.

la base totale dans l'esp de Hilbert $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$:

$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$; $|\alpha\rangle \otimes |\beta_\perp\rangle$; $|\alpha_\perp\rangle \otimes |\beta\rangle$; $|\alpha_\perp\rangle \otimes |\beta_\perp\rangle$

- $|B_{00}\rangle$ après la mesure est projeté sur un des 4 états.
- par calcul on montre les probs $= \frac{1}{4}$.

p.ex
$$|\langle\alpha| \otimes \langle\beta| \, |B_{00}\rangle|^2 = \frac{1}{4}.$$
$$|\langle\alpha| \otimes \langle\beta_\perp| \, |B_{00}\rangle|^2 = \frac{1}{4}.$$

idem

idem.

- calcul à faire comme exercice.
- on verra cela la semaine prochaine.

$$\text{prob}(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{prob}(\alpha, \beta_\perp) = \frac{1}{4}$$

$$\text{prob}(\alpha_\perp, \beta) = \frac{1}{4}$$

$$\text{prob}(\alpha_\perp, \beta_\perp) = \frac{1}{4}.$$

$\alpha_\perp$ $\quad$ α[redacted] $\quad$ $\alpha_\perp$ $\quad$ $1/2.$

$$\text{Prob}(\text{chez } A \,;\, \alpha) = \text{Prob}(\alpha, \beta) + \text{Prob}(\alpha, \beta_\perp)$$

= [redacted] $+ \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

$$\text{Prob}(\text{chez } B \,;\, \beta) = \text{Prob}(\alpha ; \beta) + \text{Prob}(\alpha_\perp ; \beta)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$\beta_\perp$ $\quad$ $\beta_\perp$ $\quad$ $\beta_\perp$ $\quad$ $1/2.$

En résumé nous avons prouvé ici que lors des mesures A et B obtiennent leur angles α, $\alpha_\perp$ ou β, $\beta_\perp$ toujours avec prob $1/2$. quelque l'ordre des mesure.

Ces angles ou résultats de Mesure sont le plus uniforme possible et la structure intriquée de $|B_{00}\rangle$ n'est pas découverte.