Inégalités de Bell → version CHSH

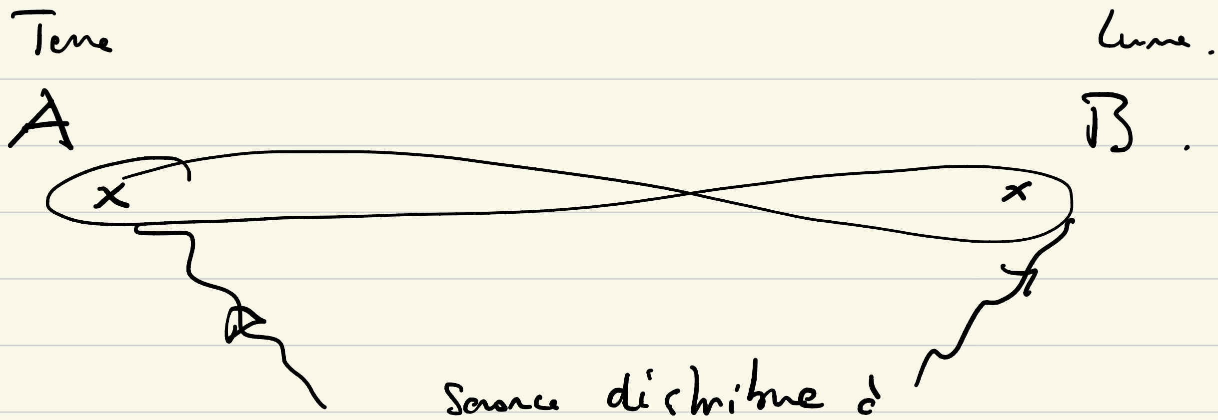
Clauser - Horne - Shimony - Holt.

- expérimentalement les test ont été initiés par Aspect, Roger, Grangier. + progrès depuis.

- MQ est bien vérifiée.

* Ces inégalités → certificat d'intrication entre A et B.

Un protocole qui permet de vérifier ou d'infirmer une certaine inégalité → certificat.



Source distribue à chaque instant $n = 0, 1, 2 \ldots$

$$|B_{00}\rangle$$

<u>Deux étapes</u> : a) mesures locales de leurs labos respectifs.

b) phase de communication classique après pour échanger les résultats des mesures.

<u>a) Mesures locales et indépendantes.</u>

A : $\underbrace{\{|\alpha\rangle ; |\alpha_\perp\rangle\}}$ ou $\underbrace{\{|\alpha'\rangle ; |\alpha'_\perp\rangle\}}$.

choix de la base aléatoire à chaque instant n

$a_n = \pm 1$ $\qquad$ $a'_n = \pm 1$

B : $\underbrace{\{|\beta\rangle, |\beta_\perp\rangle\}}$ ou $\underbrace{\{|\beta'\rangle, |\beta'_\perp\rangle\}}$,

choix aléatoire à chaque instant n

$b_n = \pm 1$ $\qquad$ $b'_n = \pm 1$

- Instant de $\underbrace{\text{type}}$ 1 $\longrightarrow$ m_1 sous ens de tous les instants possibles.

$$(\alpha\ ,\ \beta) \rightsquigarrow (\underline{a}_{m_1}\ ,\ \underline{b}_{m_1})$$

Analyseur dir α chez A

Analyseur dir β chez B.

v.a enregistrées.

- Instant de type 2 $\longrightarrow$ m_2

$$(\alpha\ ,\ \beta') \rightsquigarrow (a_{\underline{m_2}}\ ,\ b'_{\underline{m_2}})$$

- Instant de type 3 $\longrightarrow$ m_3

$$(\alpha'\ ,\ \beta) \rightsquigarrow (a'_{m_3}\ ,\ b_{m_3})$$

- Instant de type 4 $\longrightarrow$ m_4

$$(\underline{\alpha}'\ ,\ \underline{\beta}') \rightsquigarrow (a'_{\underline{m_4}}\ ,\ b'_{\underline{m_4}})$$

b) Deuxième phase du protocole A et B échangent leurs résultats (communication "publique") :

et ils calculent une sorte de coefficient de corrélation :

$C_1 = \underbrace{\frac{1}{N_1} \sum_{m_1} a_{m_1} b_{m_1}}_{\text{moyenne empirique.}}$; $C_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{m_2} a_{m_2} b'_{m_2}$; $C_3 = \frac{1}{N_3} \sum_{m_3} a'_{m_3} b_{m_3}$

$\frac{1}{N_4} \sum_{m_4} a'_{m_4} b'_{m_4} = C_4$.

et coeff corrélation :

$$\underbrace{X_{\text{empirique}}} = C_1 + C_2 - C_3 + C_4 .$$

A et B calculent cette quantité.

Quel est le résultat ?

Dans un monde "classique" ou la paire partagée par A et B n'est pas régie par la MQ et n'est pas intriquée alors la prédiction théorique

$|X_{\text{théorique}}| \leq 2$. inégalité de CSHS.

Néanmoins le résultat expérimental si la paire est dans un état de Bell

$$\max_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} \left[X_{\text{empirique}}(\alpha,\beta,\alpha',\beta') \right] = 2\sqrt{2} > 2.$$

$\Updownarrow$

violation de l'inégalité CSHS.

- Prédiction Théorique de MQ après calcul : ✓

$$\max_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} X_{\text{théorie quantique}} = \underline{2\sqrt{2}} \ldots \leftarrow \text{pour } |B_{00}\rangle.$$

$\rightarrow$ MQ est vérifiée.

✓

- Prédiction Théorique de MQ état produit $\underline{\underline{|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle}}$.

$$\max_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} X_{\text{théorie quant}} = 2$$

<u>Certificat d'intrication</u> : une paire est intriquée ssi

$$\max_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} X > 2.$$

Inégalité de Bell / CHSH.

(α, β) aux instants n_1 : $\frac{1}{N_1} \sum_{n_1} a_{n_1} b_{n_1} = C_1$

(α, β') " n_2 : $\frac{1}{N_2} \sum_{n_2} a_{n_2} b'_{n_2} = C_2$

(α', β) " n_3 : $\frac{1}{N_3} \sum_{n_3} a'_{n_3} b_{n_3} = C_3$

(α', β') " n_4 : $\frac{1}{N_4} \sum_{n_4} a'_{n_4} b'_{n_4} = C_4$.

$$X_{\text{empirique}} = C_1 + C_2 - C_3 + C_4 .$$

- Si la physique était <u>purement classique</u> dans pour une très large classe de théories imaginables :

$$| X_{\text{préd classique}} | \leqslant 2 .$$

$\wr$

?

<u>Hyp que ds une phys purement classique</u> $\hat{m}$ si

les v.a a, b, a', b' aux différents instants

ne sont pas mesurées elle possèdent une réalité

sous-jacente et il doit exister

$$\mathbb{P}(a, b, a', b')$$

une distr de probabilité jointe.

[position et la vitesse d'une particules en phys classique

$\hat{m}$ ces qts ne sont mesurées → pos et vitesse "existent"].

$$C_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{M_1} a_{M_1} b_{M_1} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{E}_1}(a b) .$$

espérance p. rapport $\mathbb{P}_1(a; b)$

$$\mathbb{E}(a b) = \sum_{a=\pm 1} \sum_{b=\pm 1} a b \; P_1(a, b)$$

$$C_2 \rightarrow \mathbb{E}_2(a b') \qquad C_3 \rightarrow \mathbb{E}_3(a' b)$$

$$C_4 \rightarrow \mathbb{E}_4(a' b') .$$

$$X_{\text{préd classique}} = \mathbb{E}_1(ab) + \mathbb{E}_2(ab') - \mathbb{E}_3(a'b) + \mathbb{E}_4(a'b')$$

$\Big\downarrow$ Hyp $\exists\ \mathbb{P}(a, b, a', b')$

$$=$$

$$\mathbb{E}_1(ab) = \sum_{a=\pm 1} \sum_{b=\pm 1} ab \boxed{P_1(a, b)}$$ Marginale.

$$= \sum_{a=\pm 1} \sum_{b=\pm 1} \underbrace{\sum_{a'=\pm 1} \sum_{b'=\pm 1}} ab\, P(a, b, \underbrace{a', b'})$$

$$= \mathbb{E}_{\underline{\underline{P}}}(ab)$$

distr jointe

$$\mathbb{E}_2(ab') = \mathbb{E}_{\underline{\underline{P}}}(ab') \qquad \mathbb{E}_3(a'b) = \mathbb{E}_{\underline{\underline{P}}}(a'b)$$

$$\mathbb{E}_4(a'b') = \mathbb{E}_{\underline{\underline{P}}}(a'b')$$

$$\Rightarrow X_{\text{préd classique}} = \mathbb{E}_{\underline{P}}\left[ab + ab' - a'b + a'b'\right] \quad \checkmark$$

par linéarité de l'espérance

$$X_{\text{préd classique}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\underbrace{ab + ab' - a'b + a'b'}\right].$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[a(b+b') - \underset{\smile}{a'}(b-b')\right].$$

$a, b, a', b' \in \{-1, +1\}$.

- si $b+b' = 0$ alors $b - b' = \pm 2$
- si $b+b' = \pm 2$ alors $b - b' = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{a(b+b') - a'(b-b') = \pm 2}$$

$\forall\ \mathbb{P}$ loi jointe : $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[a(b+b') - a'(b-b')\right]$

dans l'intervalle $[-2, +2]$.

$$\Rightarrow \boxed{\left|X_{\text{préd classique}}\right| \leq 2. \quad \uparrow_{\text{CHSH}}}$$

∎

- Mais expérimentale si la source produit $|B_{00}\rangle$ on trouve que X_{exp} maximum $= 2\sqrt{2} > 2$ CHSH violée.
- La MQ donne bien la préd théorique $X_{\text{Th quant}}$ max $= 2\sqrt{2}$ pour l'état $|B_{00}\rangle$.

Prédiction Théorique de la MQ. pour l'expérience de cette inégalité de Bell / CHSH.

- Nous allons calculer

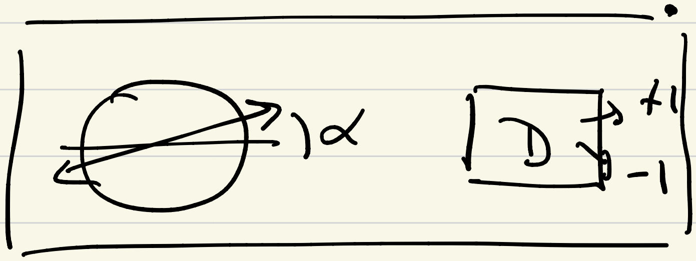
$$X_{\text{Th quant}}(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$$

- coeff empirique. $C_1 + C_2 - C_3 + C_4$.

$$C_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{m_1} a_{m_1} b_{m_1} \quad \text{ect} \ldots$$

quelle est la quantité théorique $\overbrace{\text{dans}}^{\text{correspondante}}$ la théorie quantique ?

$\alpha \longrightarrow a = \pm 1.$ en fait



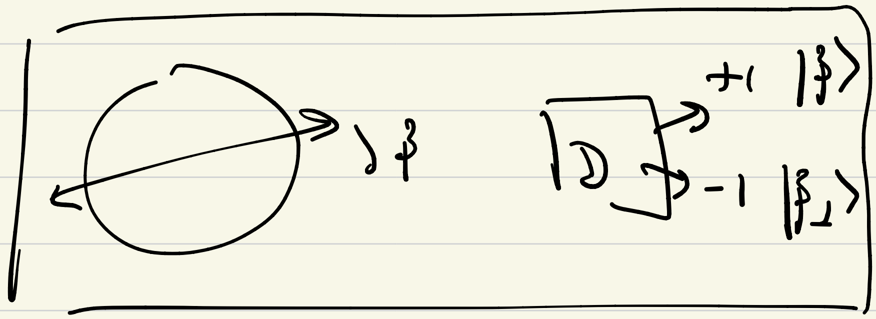
$$\begin{cases} a = +1 & |\alpha\rangle \\ a = -1 & |\alpha_\perp\rangle \end{cases}$$

en MQ on consigne les résultats de cette exp dans une matrice :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrice } 2\times 2.}}{A} \equiv (+1)\underbrace{|\alpha\rangle\langle\alpha|}_{\substack{\text{ket-bra} \\ \text{projecteur}}} + (-1)\underbrace{|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|}_{\text{projecteur.}}$$

$\Rightarrow$ Mesure de Alice donne les vecteurs et valeurs propres de matrice A.

idem pour Bob.



$$B \equiv (+1)\,|\beta\rangle\langle\beta| + (-1)\,|\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp|$$

$\Rightarrow$ Mesure de Bob donne les vect et valeurs propres de la matrice B.

La Mesure simultanée de A et Bob donne les vects et v. propres de la matrice

$$A \otimes B = \left(|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|\right) \otimes \left(|\beta\rangle\langle\beta| - |\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp|\right)$$

$$= \underbrace{|\alpha\beta\rangle}_{(+1)(+1)}\langle\alpha\beta| \overbrace{-}^{(+1)(-1)} \underline{|\alpha\beta_\perp\rangle}\langle\alpha\beta_\perp|$$

$$\underbrace{-\,|\alpha_\perp\beta\rangle}_{(-1)(+1)}\langle\alpha_\perp\beta| + \underbrace{|\alpha_\perp\beta_\perp\rangle}_{(-1)(-1)}\langle\alpha_\perp\beta_\perp|.$$

a_{m_1}, b_{m_1}

$$\underline{C_1 = \text{Moyenne}(a_{M_1} b_{M_1})}$$

$$\downarrow$$

prédiction théorique donnée par :

$$|z|^2 = z\bar{z} = \bar{z}z$$

$$|\langle\alpha\beta|B_{00}\rangle|^2 = \overline{\langle\alpha\beta|B_{00}\rangle} \cdot \langle\alpha\beta|B_{00}\rangle$$

$$= \langle B_{00}|\alpha\beta\rangle\langle\alpha\beta|B_{00}\rangle$$

$$\boxed{\sum_{a=\pm1} \sum_{b=\pm1} ab \underbrace{P(a,b)}.}$$

$$= \underbrace{P(+1,+1)} - \underbrace{P(+1,-1)} - P(-1,+1) + P(-1,-1)$$

$$= \underbrace{|\langle\alpha\beta|B_{00}\rangle|^2} - \underbrace{|\langle\alpha\beta_\perp|B_{00}\rangle|^2} - \underbrace{|\langle\alpha_\perp\beta|B_{00}\rangle|^2} + \underbrace{|\langle\alpha_\perp\beta_\perp|B_{00}\rangle|^2}$$

$$= \langle B_{00}|\alpha\beta\rangle\langle\alpha\beta|B_{00}\rangle - \langle B_{00}|\alpha\beta_\perp\rangle\langle\alpha\beta_\perp|B_{00}\rangle$$

$$- \langle B_{00}|\alpha_\perp\beta\rangle\langle\alpha_\perp\beta|B_{00}\rangle + \langle B_{00}|\alpha_\perp\beta_\perp\rangle\langle\alpha_\perp\beta_\perp|B_{00}\rangle$$

$$= \langle B_{00}|\Big(|\alpha\beta\rangle\langle\alpha\beta| - |\alpha\beta_\perp\rangle\langle\alpha\beta_\perp| - |\alpha_\perp\beta\rangle\langle\alpha_\perp\beta| + |\alpha_\perp\beta_\perp\rangle\langle\alpha_\perp\beta_\perp|\Big)|B_{00}\rangle.$$

$$= \boxed{\langle B_{00}|A\otimes B|B_{00}\rangle.}$$

- $C_2 = \text{Moy}(a_{M_2} b'_{M_2})$. (α, β').

$$\text{Préd Th} = \sum_{a=\pm 1} \sum_{b'=\pm 1} a b' \, P(a, b').$$

$$= \langle B_{00} | A \otimes B' | B_{00} \rangle . \checkmark$$

$$\begin{cases} A = |\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| \\ B' = |\beta'\rangle\langle\beta'| - |\beta'_\perp\rangle\langle\beta'_\perp| . \end{cases}$$

- $C_3 \longrightarrow \text{Préd Th} = \langle B_{00} | A' \otimes B | B_{00} \rangle . \checkmark$
- $C_4 \longrightarrow \text{Préd Th} = \langle B_{00} | A' \otimes B' | B_{00} \rangle . \checkmark$

<u>Finalement :</u>

$$\boxed{X_{\text{Th Quant}} = \langle B_{00} | A \otimes B | B_{00} \rangle + \langle B_{00} | A \otimes B' | B_{00} \rangle - \langle B_{00} | A' \otimes B | B_{00} \rangle + \langle B_{00} | A' \otimes B' | B_{00} \rangle}$$

$\downarrow$ Il suffit maintenant de faire les calculs.

Calcul de $\langle B_{00} | A \otimes B | B_{00} \rangle$:

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha\alpha\rangle + |\alpha_\perp\alpha_\perp\rangle\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{\langle\alpha\alpha|}_{\langle\alpha|\otimes\langle\alpha|} + \langle\alpha_\perp\alpha_\perp|\right)\left(A \otimes B\right)\left(\underbrace{|\alpha\alpha\rangle}_{|\alpha\rangle\otimes|\alpha\rangle} + |\alpha_\perp\alpha_\perp\rangle\right).$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ \underbrace{\langle\alpha|A|\alpha\rangle\langle\alpha|B|\alpha\rangle}_{\cos(2(\alpha-\beta))} + \overbrace{\langle\alpha|A|\alpha_\perp\rangle}^{0}\langle\alpha|B|\alpha_\perp\rangle$$

$$+ \underbrace{\langle\alpha_\perp|A|\alpha\rangle}_{0}\langle\alpha_\perp|B|\alpha\rangle + \underbrace{\langle\alpha_\perp|A|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|B|\alpha_\perp\rangle}_{\cos(2(\alpha-\beta))}\Big\}$$

$$\begin{cases} A = |\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| \\ B = |\beta\rangle\langle\beta| - |\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp| \end{cases}$$

$$\langle\alpha|A|\alpha\rangle = \langle\alpha|\left(|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|\right)|\alpha\rangle$$
$$= 1$$

$$\langle\alpha|B|\alpha\rangle = \langle\alpha|\left(|\beta\rangle\langle\beta| - |\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp|\right)|\alpha\rangle$$
$$= \left(\cos(\alpha-\beta)\right)^2 - \left(\sin(\alpha-\beta_\perp)\right)^2 \quad \ldots$$
$$= \cos(2(\alpha-\beta)).$$

Finalement on trouve !

$$\boxed{\langle B_{00} | A \otimes B | B_{00} \rangle = \cos(2(\alpha - \beta)).}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} X_{\text{Th quant}} = \; & \cos(2(\alpha-\beta)) + \cos(2(\alpha-\beta')) \\ & - \cos(2(\alpha'-\beta)) + \cos(2(\alpha'-\beta')) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\max_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} \left[X_{\text{Th quant}} \right] = \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}.}$$

$\uparrow$

$\alpha = 0 \;,\; \alpha' = -\frac{\pi}{4} \;,\; \beta = \frac{\pi}{8} \;,\; \beta' = -\frac{\pi}{8}$

- Et $2\sqrt{2} > 2$ c.à.d que la MQ donne une prédiction radicalement différente de phy classique $|X_{\text{Th classique}}| \leq 2$.
- Exp on trouve bien $2\sqrt{2}$!

<u>Remarque importante.</u> (aux exercices).

Si la source émet une paire pas intriquée ds un état produit : $|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$.

Alice   Bob.

On montre que

$$
\begin{aligned}
X_{\substack{\text{quant}\\ \text{état produit}}} = & \langle \varphi_1 \varphi_2 | A \otimes B | \varphi_1 \varphi_2 \rangle \\
& + \langle \varphi_1 \varphi_2 | A \otimes B' | \varphi_1 \varphi_2 \rangle \\
& - \langle \varphi_1 \varphi_2 | A' \otimes B | \varphi_1 \varphi_2 \rangle \\
& + \langle \varphi_1 \varphi_2 | A' \otimes B' | \varphi_1 \varphi_2 \rangle
\end{aligned}
$$

On montre : $\left| X_{\substack{\text{quant}\\ \text{état prod}}} \right| \leq 2$.

Inégalité $|X| \leq 2$ ou $|X| > 2$

peut servir de certificat pour détecter l'intrication.