EPFL

Information, Calcul et Communication

Petit aperçu de la suite du cours

Olivier Lévêque

École
polytechnique
fédérale
de Lausanne

Introduction

- Supposons que votre meilleur.e ami.e habite en Nouvelle-Zélande, et que vous désiriez lui jouer un sketch pour son anniversaire.
- Il y a 150 ans, vous auriez eu besoin de 80 jours…
- Il y a 50 ans, seuls 2-3 jours auraient suffi…
- Mais aujourd'hui, seules quelques minutes suffisent !
  (si on excepte le temps qu'il vous faut pour préparer le sketch)
- Que se passe-t-il exactement pendant ces quelques minutes?

Première étape

Avec des amis, vous préparez une vidéo amusante...

Le son et l'image sont enregistrés au format vidéo :

- Un signal analogique est converti en sa representation numérique, au moyen d'un algorithme sophistiqué.
- Un algorithme de correction d'erreurs est utilisé pour enregistrer le fichier en mémoire.

Deuxième étape

Vous téléchargez la vidéo sur votre plateforme préférée…

(mais avant ça, vous réduisez sa taille au moyen d'un algorithme de compression pour que sa transmission ne pose pas de problèmes)

- Deux autres algorithmes de correction d'erreurs sont utilisés pour protéger la transmission des données :
  - de votre ordinateur/téléphone jusqu'à la prochaine borne wifi ;
  - sur internet.
- Un algorithme de chiffrement est également utilisé.

Troisième et dernière étape

Finalement, votre ami.e découvre la vidéo…

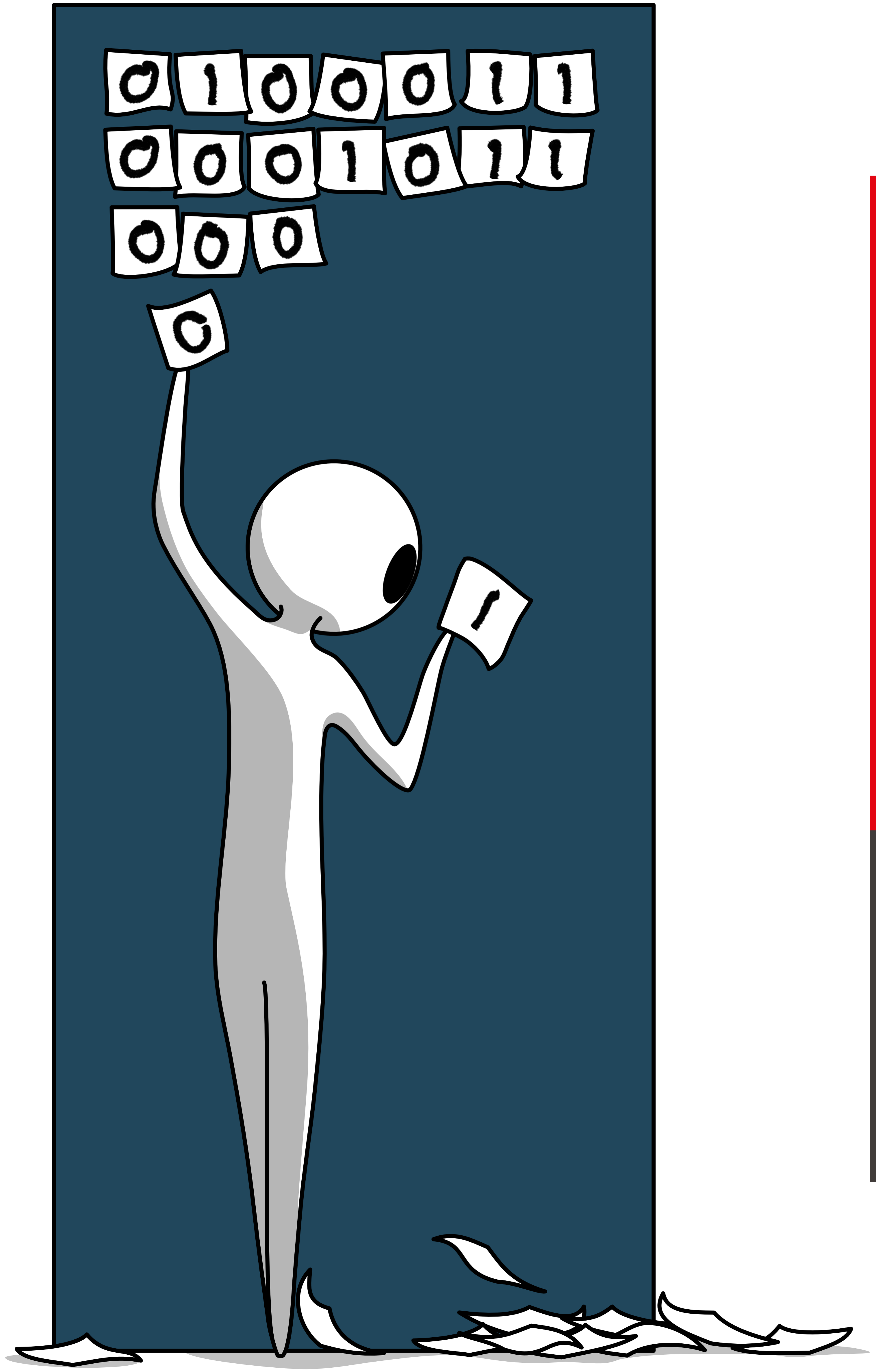
- Un ou deux algorithmes de correction d'erreurs sont à nouveau utilisés ici ;
- ainsi qu'un algorithme de déchiffrement ;
- et le signal est reconstruit à partir des données numériques.

Pour résumer

- Dans nos gestes quotidiens, nous utilisons désormais un grand nombre d'algorithmes sophistiqués, souvent sans nous en rendre compte.
- L'omniprésence de ces algorithmes a, qu'on le veuille ou non, quelque peu changé notre manière de communiquer, de voyager, de voir le monde…
- Plusieurs contributions fondamentales, remontant pour la plupart à plus d'une septantaine d'années, ont permis la réalisation de ces moyens de communication modernes et l'avènement de notre ère digitale.
- Ce sont ces contributions que nous vous proposons de découvrir plus en détail dans les cours qui suivent.

Plan des semaines à venir

- Représentation de l'information :
  - Nombres entiers
  - Nombres réels
  - Implémentation concrète : circuits logiques et transistors
- Echantillonnage et reconstruction de signaux
- Entropie et compression de données
- Communication :
  - Correction d'erreurs
  - Réseaux
  - Cryptographie et sécurité



Information, Calcul et Communication

Représentation de l'information

Olivier Lévêque

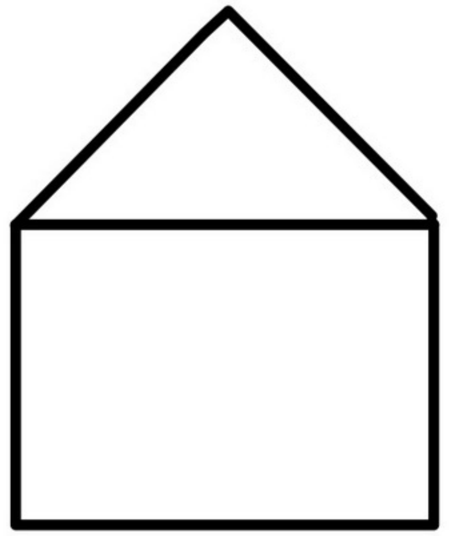
École
polytechnique
fédérale
de Lausanne

Introduction

Il existe plusieurs façons de représenter une information.

Exemple:

- maison
- Haus
- casa
- chasa
- house
- domus



Mais encore:

- _ _ · _ ·· ··· _ _ _ _·
  (code Morse)
- 77 65 73 83 79 78
  (code ASCII décimal)
- 4D 41 49 53 4F 4E
  (code ASCII hexadécimal)
- 01001101 01000001 …
  (code ASCII binaire)

Pourquoi choisir la représentation binaire?

- Réduction à deux symboles (0 et 1) facile à implementer:

0 = circuit ouvert / 1 = circuit fermé

0 = tension de 0V / 1 = tension de 5V

- Et au fait, pourquoi ne pas choisir *un seul* symbole (“1”, par exemple) ?

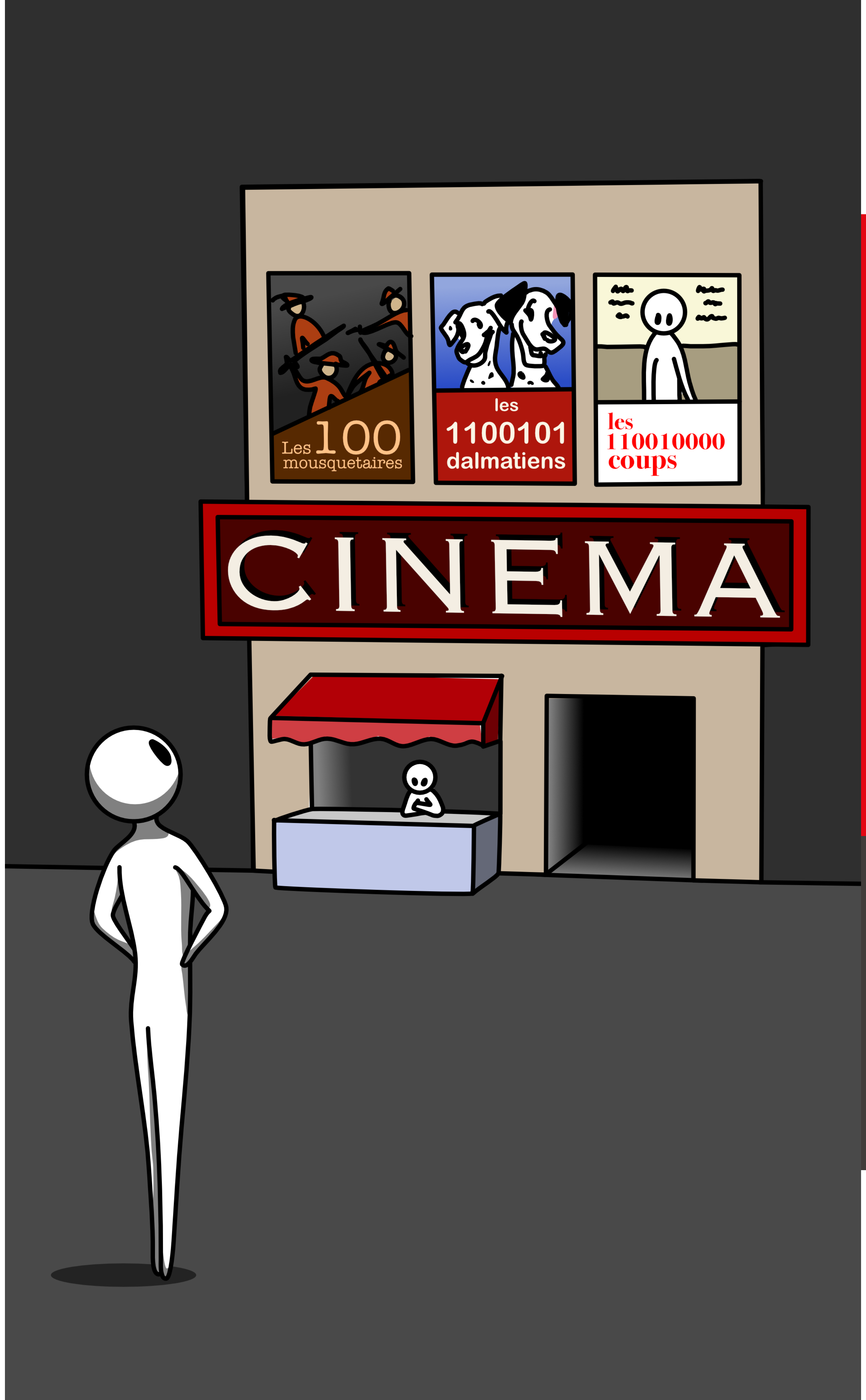
Représentation binaire

Avec n bits, on peut représenter 2^n éléments différents.

Exemples:

- 1 bit: “noir” (0) ou “blanc” (1)
- 2 bits: “à gauche” (00), “à droite” (01), “en haut” (10) ou “en bas” (11)
- 8 bits: 256 caractères différents (code ASCII étendu)
- 32 bits: plus de 4 milliards de caractères différents (code UTF-8)

EPFL



Information, Calcul et Communication

Représentation binaire des nombres entiers

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Représentation binaire des nombres entiers positifs

- Prenons un exemple de nombre entier positif: $1'984$

- Ceci est une représentation ! (la représentation décimale)

$$1'984 = 1'000 + 900 + 80 + 4 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

(D'autres avant nous auraient écrit: M C M L X X X I V)

- Mais on peut aussi écrire: $1'984 = 1'024 + 512 + 256 + 128 + 64$

$$= 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6$$

$$+ 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$\rightarrow 11111000000$ en binaire

Cas général

- Représentation décimale: $N = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \cdot 10^j$ m chiffres $c_j \in \{0,1, \dots, 9\}$

  Nombre de chiffres nécessaires: $\mathrm{m} = \lceil \log_{10}(N+1) \rceil$

- Représentation binaire: $N = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot 2^i$ n bits $b_i \in \{0,1\}$

  Nombre de bits nécessaires: $\mathrm{n} = \lceil \log_{2}(N+1) \rceil$

- Attention! Avec n bits, on peut représenter 2^n nombres entiers différents:
  les nombres de 0 $(= 000 \dots 0)$ à $2^n - 1$ $(= 111 \dots 1)$ et donc *pas* 2^n lui-même!

  Exemple avec $\mathrm{n} = 8$ bits: intervalle de 0 à $2^8 - 1 = 255$

Opérations binaires: addition et soustraction

- Addition:

- Soustraction:

Opérations binaires: multiplication et division

En binaire, multiplier et diviser par 2 est très facile:

(de même que multiplier et diviser par 10 est très facile en décimal)

Opérations binaires: dépassement de capacité

Etant donné la limite imposée par le nombre de bits utilisés, des problèmes de *dépassement de capacité (overflow)* surviennent lorsqu'on effectue des opérations binaires *et que le résultat attendu se trouve en dehors de l'intervalle des nombres représentables.*

Exemples:

Représentation binaire des nombres entiers relatifs

- Avec n bits, on utilise la convention suivante pour représenter les nombres entiers relatifs (positifs et négatifs) :

$$N = -b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i \cdot 2^i$$

- Exemple avec 8 bits: $N = -43$ est représenté par 11010101, car

$$-43 = -128 + 64 + 16 + 4 + 1$$

$$= -1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Représentation binaire des nombres entiers relatifs

Remarques:

- Le premier bit est le bit de signe (0 : nombre positif, 1 : nombre négatif)

- Avec 8 bits, les nombres représentables vont de -128 à $+127$:

$$-128 = 10000000 \quad \rightarrow \quad +127 = 01111111$$

- $-1 = 11111111$ avec cette représentation

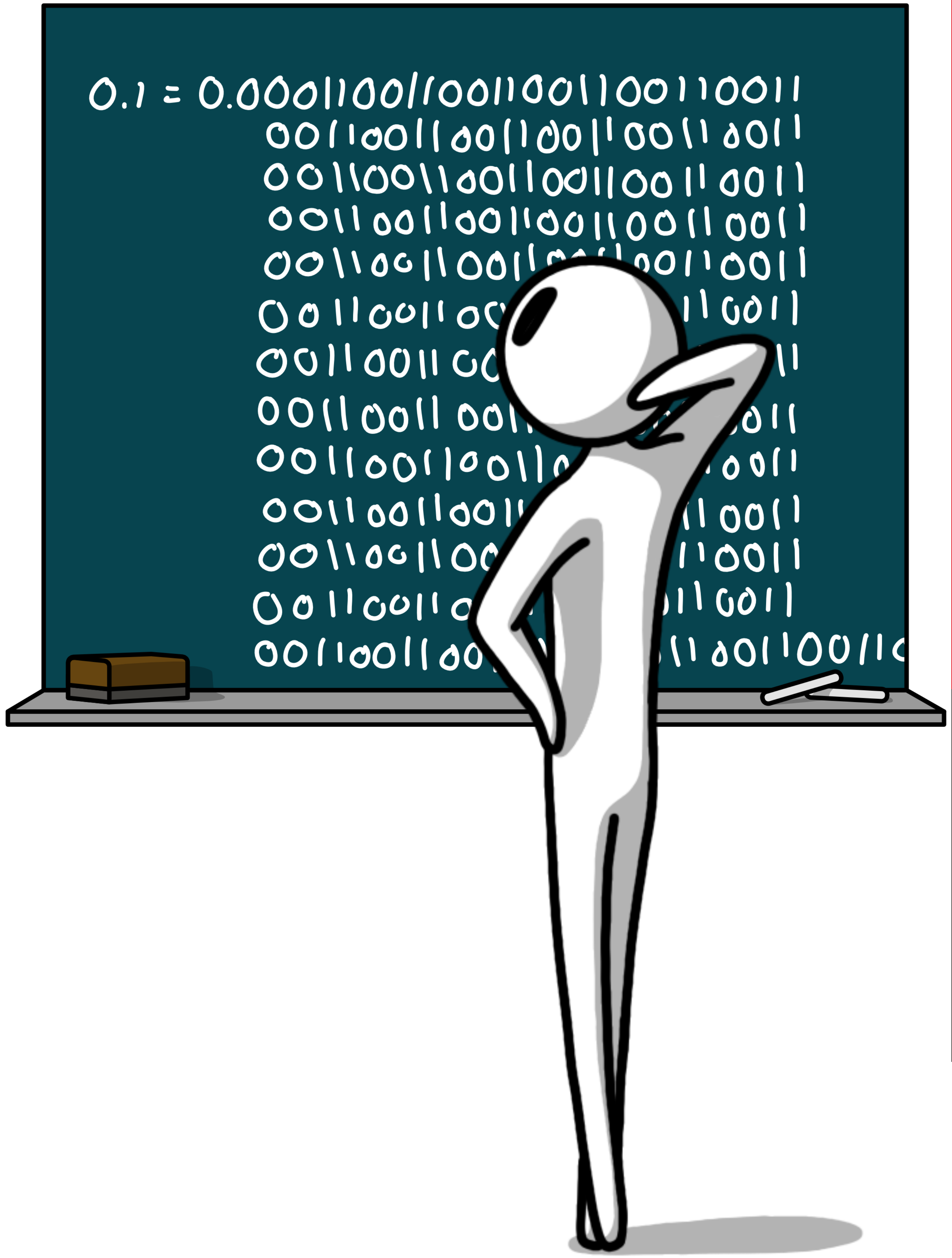
- $+128$ n'est *pas* représentable avec 8 bits!

Opérations binaires: addition et soustraction (bis)

- Addition:

- Soustraction:

EPFL



Information, Calcul et Communication

Représentation binaire des nombres réels

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Représentation binaire des nombres réels

Première remarque:

Avec un nombre fini de bits, on ne peut pas représenter *tous* les nombres réels de manière exacte ! (même si on se limite à l'intervalle fermé [0,1])

Il faut donc s'attendre à effectuer des *erreurs* dans ce cas.

Soit x_{rep} la valeur représentée en binaire du nombre x. On définit:

l'erreur *absolue*: $|\Delta x| = |x - x_{rep}|$

l'erreur *relative*: $|\Delta x|/|x|$

(= "précision")

Représentation binaire des nombres réels

- Prenons un nombre entre 0 et 1, par exemple, $x = 0{,}375$:

$$x = 0{,}375 = 0{,}25 + 0{,}125 = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \quad \rightarrow \quad 011$$

(représentation exacte!)

- Autre exemple:

$$\mathrm{y} = \pi - 3 = 0{,}1415926535 \ldots = 0.125 + \ldots$$

$$= 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + \ldots \quad \rightarrow \quad 0010 \ldots$$

(représentation approximative!)

Représentation binaire des nombres réels: représentation en virgule fixe

- Nombres réels plus grand que 1:

n bits pour la partie entière, n bits pour la partie décimale

$\rightarrow$ “tous” les nombres de 0 à 2^n

- Nombres réels négatifs: rajouter un bit de signe

Représentation binaire des nombres réels: représentation en virgule fixe

- Erreur absolue avec cette représentation:

$$|\Delta x| = |x - x_{rep}| \le 2^{-n}$$

si n bits sont utilisés pour la partie décimale. ✓

- Erreur relative?

$$|\Delta x| \,/\, |x|$$

peut être arbitrairement grande si x est proche de 0. ✗

Représentation binaire des nombres réels: représentation en virgule flottante

Pour pallier à ce problème de précision, on choisit plutôt la représentation suivante:

1. On garde la représentation en virgule fixe avec n bits pour les nombres réels dans l'intervalle [1,2]

   → erreur relative $|\Delta x| \,/\, |x| \leq 2^{-n}$ car $|x| \geq 1$

2. On réplique cette représentation à toutes les échelles en la multipliant ou en la divisant par des puissances de 2.

Représentation binaire des nombres réels: représentation en virgule flottante

Schéma comparatif:

Virgule fixe:

Virgule flottante: