

Le spin.

- Le "spin" degré de liberté relié au moment magn.



- Le "spin intrinsèque" des particules est décrit par des états de Bit Quantique.

[électron, proton, neutron, noyaux atomique, atomes]

portent ce degré de liberté de spin.

Plan.

- Man Magnétiques classiques.
- Exps de Stern de Gerlach \rightarrow ■■ en évidence les ■■ Magnétiques quantiques
- Formalisme des Matrices de Pauli et l'Hamiltonien (et d'énergie) du spin dans le champ \vec{B} .

2 prochaines semaines:

II. Dynamique du spin dans un champ \vec{B}_0 constant
Précession de Larmor.

III. Dym du spin ds un champ $\vec{B}(t)$
tournant.

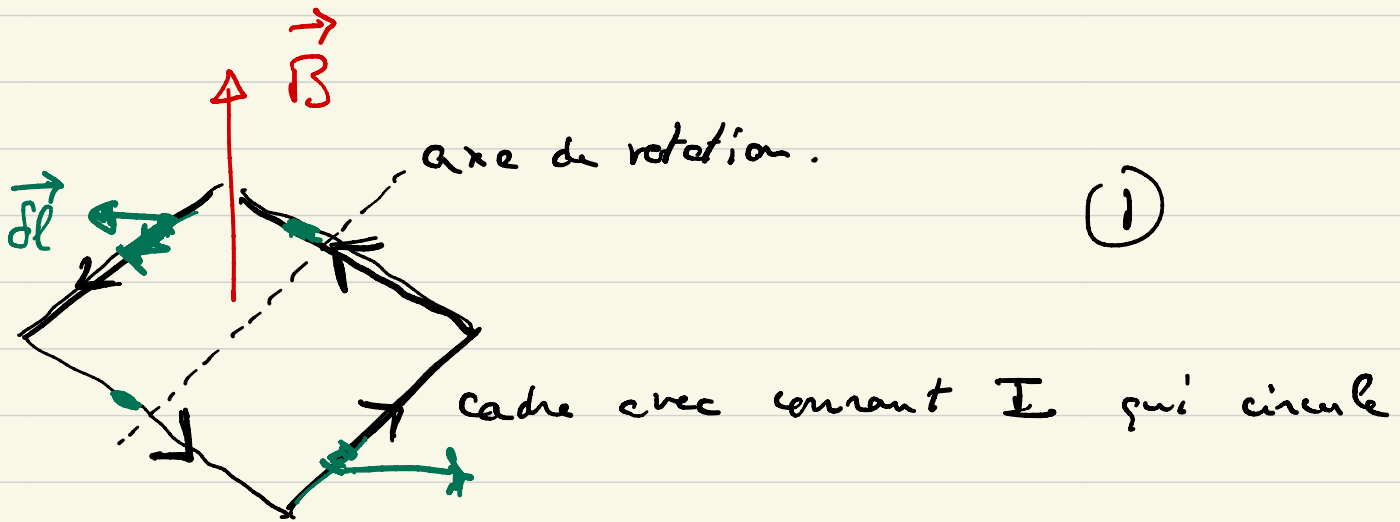
• RMN Osc de Rabi.

• Appl pour fabriquer portes logiques en Info
quantique.

↓
Manipuler les qubits.

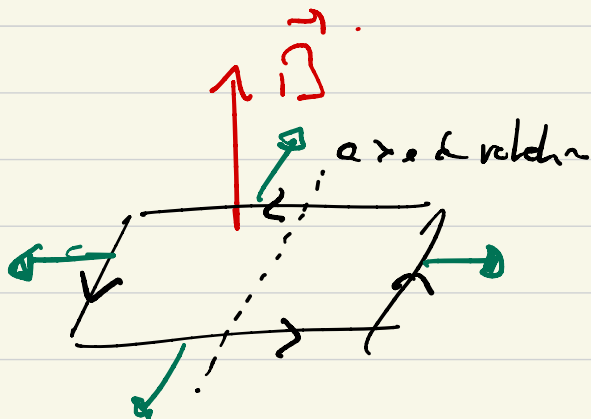
#.

a) Moment Magnétique classique.

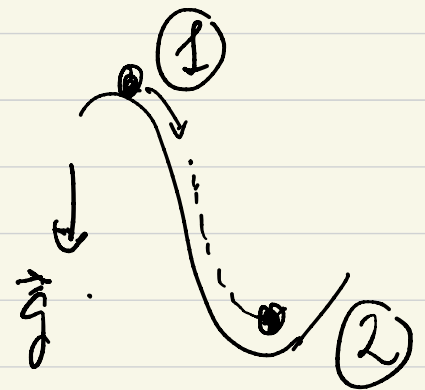


• Force de Laplace. $\underline{d\vec{F}} = I \underline{d\vec{l} \times \vec{B}}$
 $\perp \vec{B}; \perp d\vec{l}$

• Forces de Laplace vont équilibrer le cadre dans une pos d'équilibre.



(2)



• On peut dire que de la situation (1) énergie potentielle stockée dans la configuration du cadre et de \vec{B} //
 \hookrightarrow cette énergie est minimisée dans la situation (2).

• Energie potentielle associée :

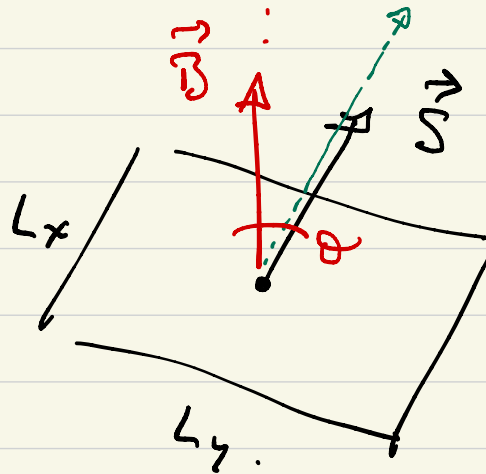
Moment magnétique.

$$E = -\vec{M} \cdot \vec{B} \quad \vec{M} \text{ avec}$$

$$\vec{M} = I \vec{S}$$

$$\|\vec{S}\| = L_x L_y$$

①

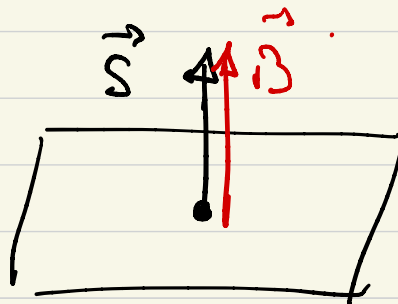


$$E = -I S B \cos \theta$$

$$= -I L_x L_y \cos \theta$$

pour minimiser E il faut maximiser $\vec{M} \cdot \vec{B}$

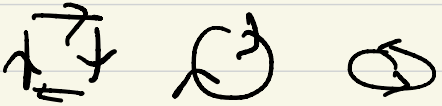
②



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pr. sc est maximal.} \\ \cos \theta = 1, \theta = 0. \end{array} \right.$$

Remarque : $E_{\text{pot}} =$ Travail de la force de la pièce quand on passe de ① \rightarrow ②.

∇

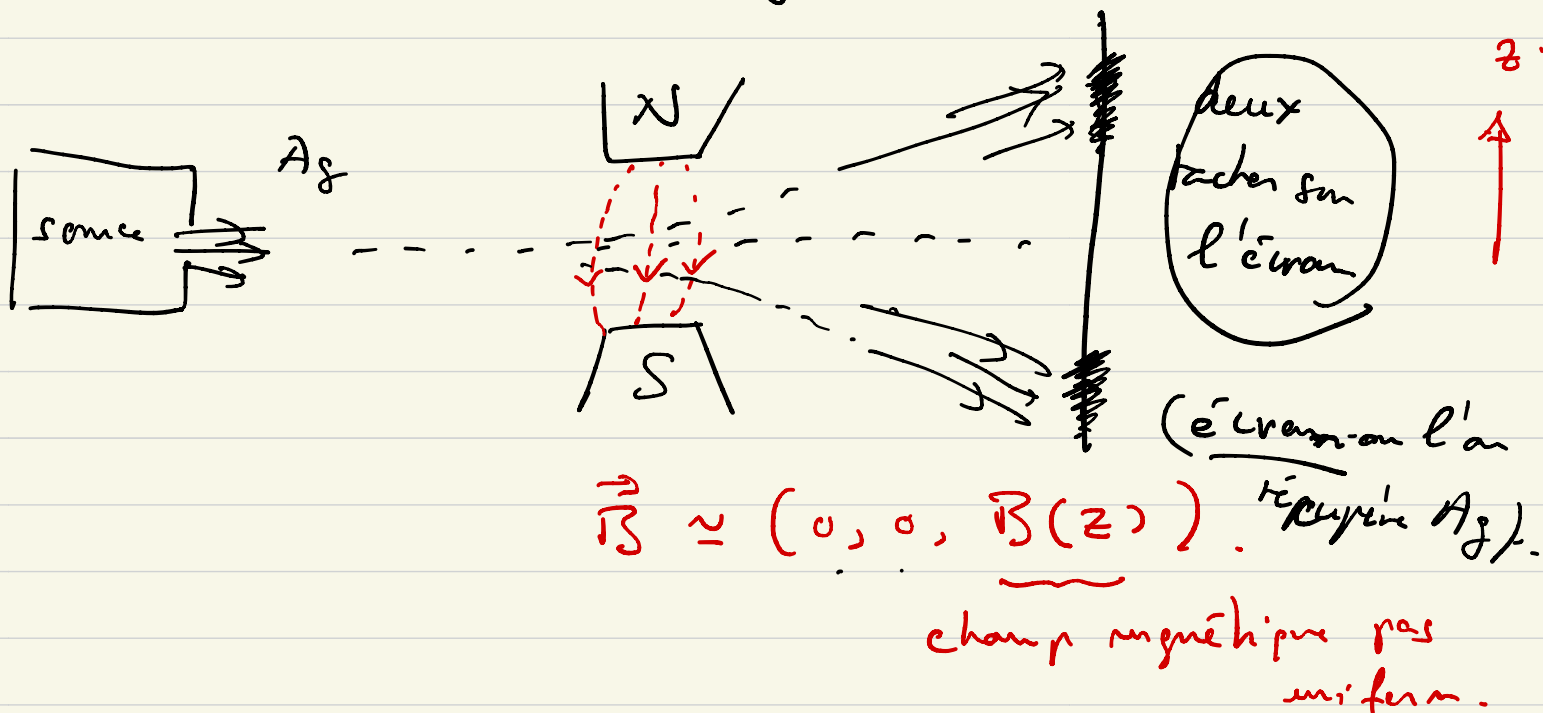
À retenir : une boucle de courant  crée un moment magnétique. $\vec{M} = I \vec{S}$

Tendance à s'aligner avec \vec{B} car $E_{\text{pot}} = -\vec{M} \cdot \vec{B}$

- Les particules élémentaires portent un moment magnétique intrinsèque. ← pas forcément associé à une boucle de courant

b) Cela est mis en évidence grâce aux exp de Stern et Gerlach.

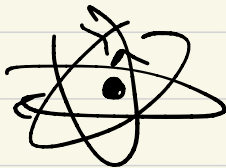
source d'atomes d'Argent Ag. (neutre).



- invoquer le force de Laplace → Mais Ag sont Neutres et ne portent pas de boucles de courant.

Pas de Mom Magn classique

- Stern et Gerlach → ∃ Mom Magn Quantique intrinsèque qui n'est pas associé aux boucles de courant.

(Empile Ag impair d' e^- 

chaque e^- porte un Mom Magn intrinsèque et s'équilibre
 mais il reste un e^- dont le Mom Magn ne
 s'équilibre pas

↳ Ag possède le même moment magnétique
 que l' e^- de la couche externe.

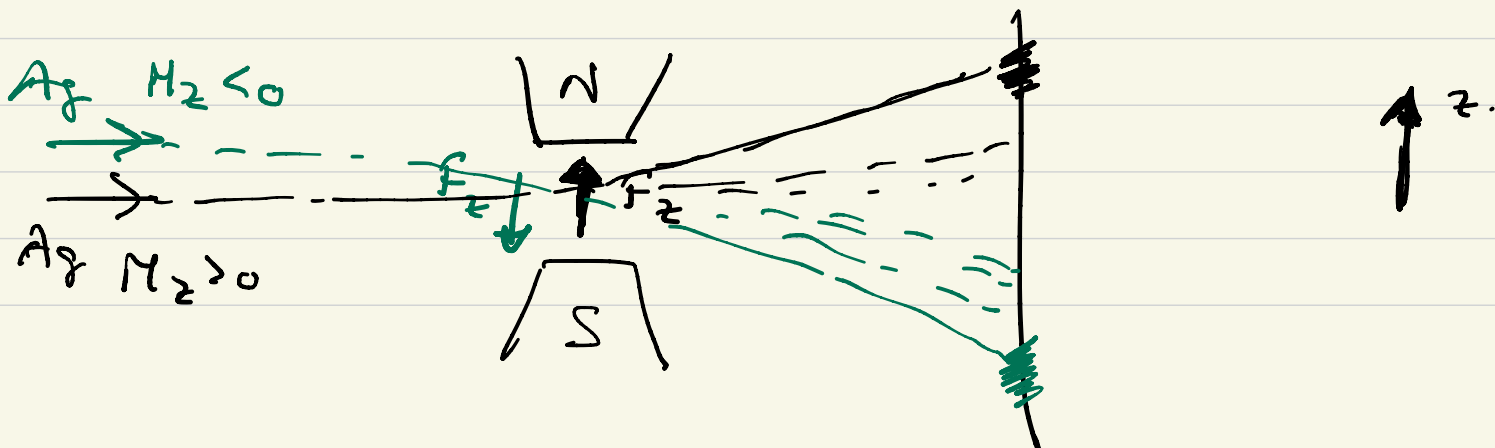
$$E = - \vec{M} \cdot \vec{B}(z) = - M_z B_z(z).$$

↑

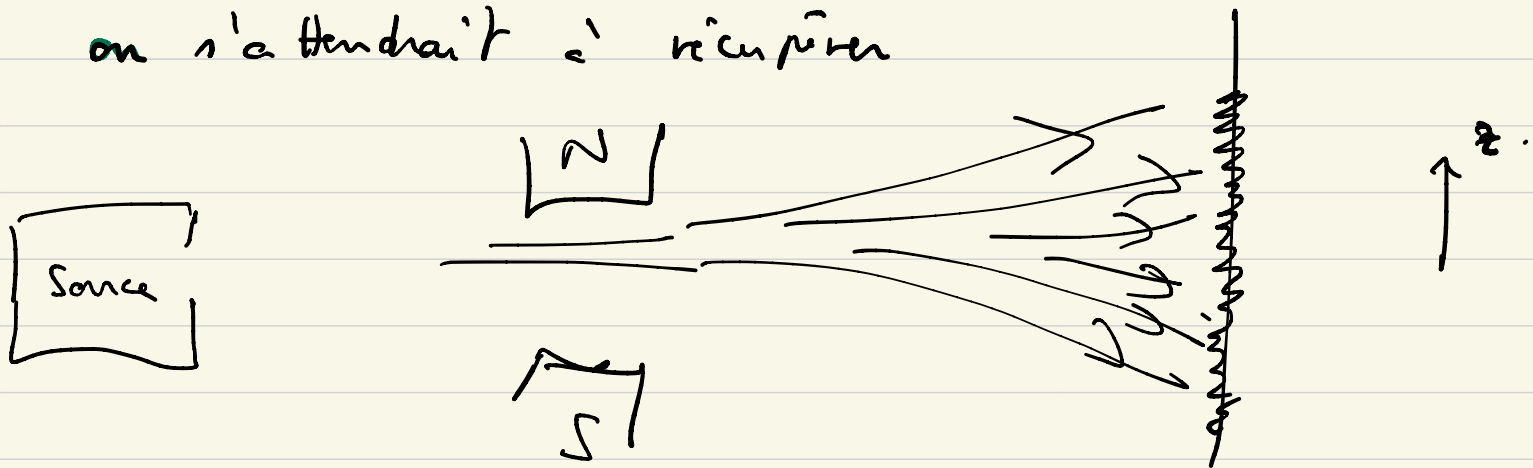
dépend de z .

$$\underbrace{\text{Force ici}}_{\vec{F}_z} = - \frac{dE}{dz} = - M_z \underbrace{\left(\frac{dB_z(z)}{dz} \right)}_{\neq 0}.$$

Force va dans le sens de $+M_z$.



- Avec un continuum de valeurs de M_z > 0 et < 0
on s'attendrait à récupérer



- Mais on observe deux taches.

⇒ M_z prend deux valeurs possibles.

- fait penser à la pol du photon.

qui prend 2 vel possible

A diagram showing a 2D coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. Below the x-axis, there are two circular arrows: one pointing clockwise and one pointing counter-clockwise, representing the two possible polarization states.

- Ce Moment Magn est aussi un deg de liberté quantique qui prend deux vals possible!

Résumé :

a) Les particules élémentaires (électrons, protons, neutrons, ...)
mais Noyaux Atomiques et atomes.

portent un Moment Magnétique Intrinsic.

$$\vec{M} = (M_x, M_y, M_z).$$

↑
deux
val
poss

↑
deux
val
poss

↑
deux valeurs possible

b) Degré de Liberté quantique, l'état du deg de
liberté quantique → l'état d'un qubit. \mathbb{C}^2 .



Parentheise avant de reprendre le cours sur le spin.

"observable".

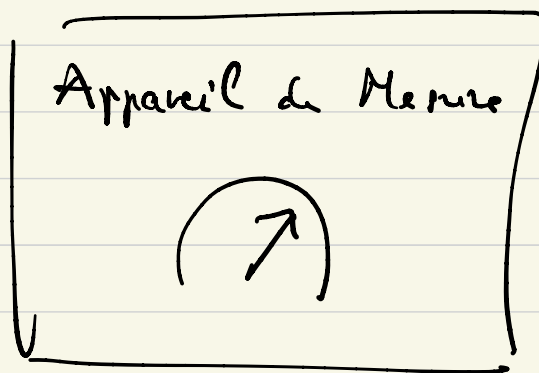
Description des quantités mesurables en Phys Quant
par des matrices.

- Energie potentielle.
- Moment Magnétique (spin).
- Polarisation des photons.
- Taille quantique (la Mer-1).

→ en phys classique quant mesurable \leadsto Nombre réel,

→ en phys quant quant mesurables (observables)
 \leadsto Matrices.

$|\psi\rangle \rightarrow$
avant la
Mesure



$|\varphi_1\rangle \quad p_1 = |\langle \varphi_1 | \psi \rangle|^2$
 $|\varphi_2\rangle \quad p_2 = |\langle \varphi_2 | \psi \rangle|^2$
 \vdots
 $|\varphi_d\rangle \quad p_d = |\langle \varphi_d | \psi \rangle|^2$

• base orthonormale de \mathcal{H}

$|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_d\rangle$

$\dim \mathcal{H} = d.$

• en réalité cette appareil
mesure une observable.

a_1
 a_2
 \vdots
 a_d

valeurs possibles de l'observable.
réelles.

On peut résumer tous les résultats possibles de la Mesure dans une matrice qui est diagonale de la base de l'app de Mesure.

Ket-bra = Matrice de projection.

$$A = a_1 |\varphi_1\rangle \langle \varphi_1| + a_2 |\varphi_2\rangle \langle \varphi_2| + \dots + a_d |\varphi_d\rangle \langle \varphi_d|$$

$$A |\varphi_j\rangle = a_j |\varphi_j\rangle$$

v.p. vecteur propre

• (Valeur Moy obtenue pour les a_j)

$$= \sum_{j=1}^d a_j P_j = \sum_{j=1}^d a_j \underbrace{|\langle \varphi_j | \psi \rangle|^2}$$

$$= \sum_{j=1}^d a_j \langle \psi | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | \underbrace{\left\{ \sum_{j=1}^d a_j |\varphi_j\rangle \langle \varphi_j| \right\}}_A | \psi \rangle$$

(Valeur Moy des a_j) = $\langle \psi | A | \psi \rangle$.

Valeur Moy de l'observable A .

• (Variance des résultats de mesure a_j) = $\dots \dots \dots$ calcul \dots

$$= \langle \psi | A^2 | \psi \rangle - (\langle \psi | A | \psi \rangle)^2$$

↳ (Matrice A au carré).

- Si vous connaissez A , vous prévoyez les résultats de mes (car vous construisez un app de mesure et fait diagonaliser la Matrice :

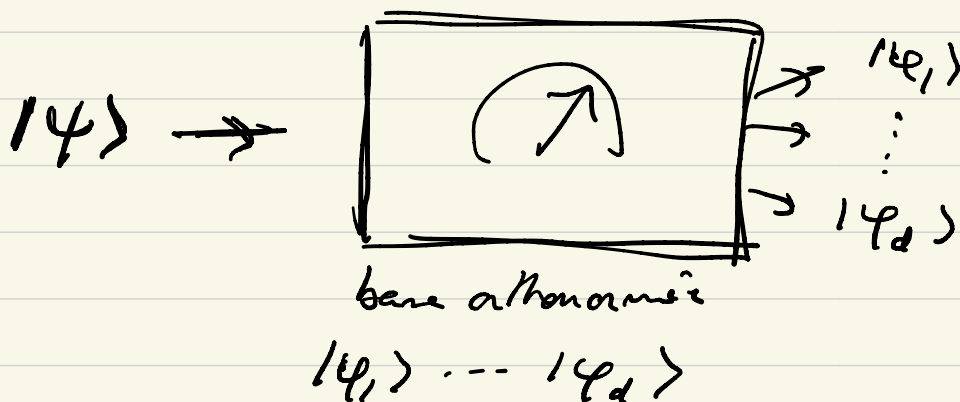
$$\dots A |\varphi_j\rangle = a_j |\varphi_j\rangle; \quad j = 1 \dots d.$$

\uparrow \leftarrow
 valeur propre vecteur propre
 $\in \mathbb{R}$,

- Résultats possibles sont a_1, \dots, a_d
 $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_d\rangle$.

$$p_j = |\langle \varphi_j | \psi \rangle|^2$$

\uparrow état initial avant la mesure



- Si changez l'obs mesurée vous changez la base et vous changez l'app de mesure.

Important, Résultats de Mesure sont $\in \mathbb{R}$.

a_1, \dots, a_d v.p de A doivent être \mathbb{R} .
et on postule donc que une observable est
décrite par une matrice hermitienne.

Par def: une matrice hermitienne est telle
que $A = A^T, *$

Matrices qui décrivent l'énergie, moment angulaire,
la polarisation (exercice) et ... sont toutes
hermitiennes.

Complément ; Relation d'incertitude de Heisenberg.

Deux observables, A et B . (deux matrices).

L'incertitude de Cauchy-Schwarz implique :

$$\left(\text{Variance Mes de } A \right)^{1/2} \left(\text{Variance Mes de } B \right)^{1/2} \geq \frac{1}{2} \langle \psi | [A, B] | \psi \rangle$$

def $[A, B] = AB - BA$
commutateur des deux matrices.

. Var Mes de $A = \left(\langle \psi | A^2 | \psi \rangle - \langle \psi | A | \psi \rangle^2 \right) \checkmark$

. Var Mes de $B : \left(\langle \psi | B^2 | \psi \rangle - \langle \psi | B | \psi \rangle^2 \right) \checkmark$

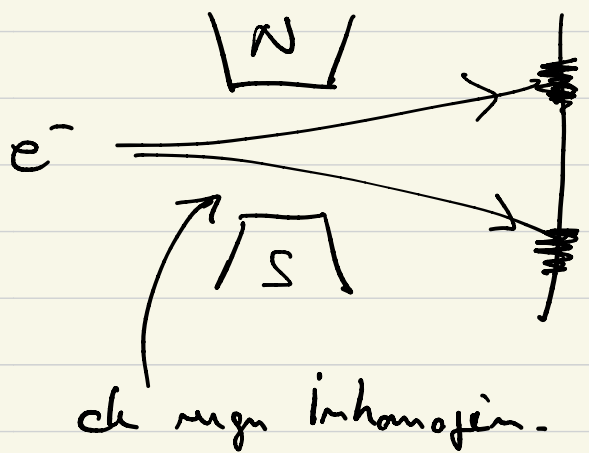
Interprétation physique habituelle :

Si $[A, B] \neq 0$ on ne peut pas mesurer simultanément A et B avec une précision infinie dans un état $|\psi\rangle$.

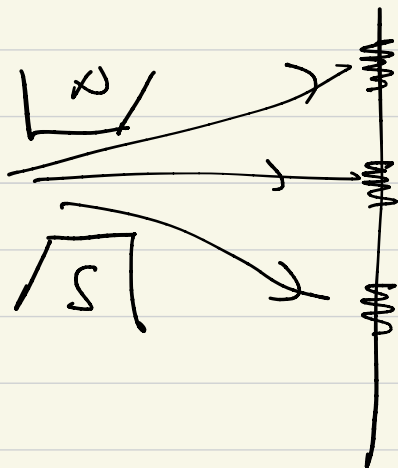


Le spin. $1/2 = s$.

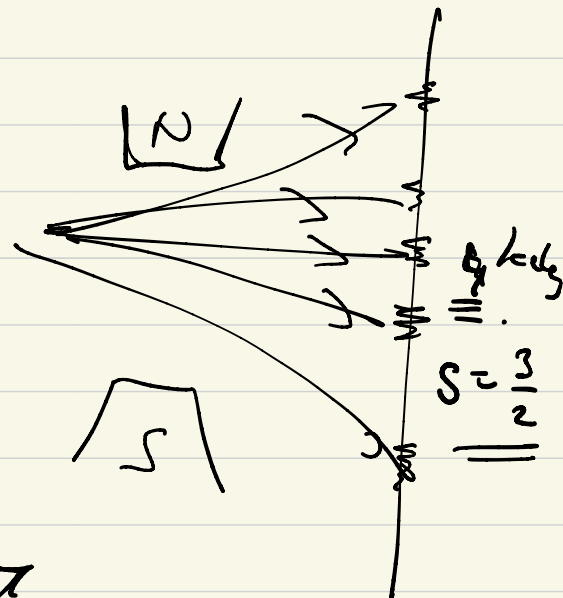
c) Formalisme des matrices de Pauli pour
décrire un moment magnétique.



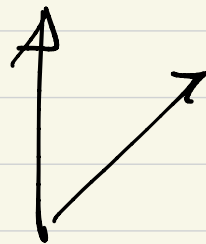
2 kets. / 2 vel. possibl du moment magn.



3 kets
 $S=1$



5 kets
 $S=3/2$

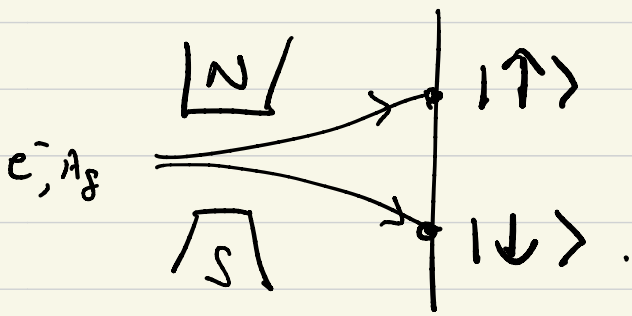


matrices plus compliquées dont nous
n'allons pas parler.

M_z

Moment Magn de la direction z prend deux val possibles.

= quantité mesurée est décrite par une matrice qui contient les résultats de mesure possible.



$$\sigma_z = \underbrace{(+1) |\uparrow\rangle\langle\uparrow|}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{(-1) |\downarrow\rangle\langle\downarrow|}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

deux états possibles détectés.

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_z = \gamma \frac{\hbar}{2} \sigma_z$$

\hbar = const de Planck.
= $[J \cdot s]$

$$E = -M_z B_z$$

[Joules]

constante. qui dépend de la particule. $\gamma = g \frac{q}{2m}$.

↪ en Hz

$$\frac{qB_z}{2m} = \text{fréquence} = \left[\frac{1}{s} \right]$$

$e^-: g \approx 2; p^+: g \approx 5; \dots$

$$M_z = g \underbrace{\frac{q}{2m} \frac{\hbar}{2}} \sigma_z.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

$|\uparrow\rangle$ = état délocalisé de la bande supérieure

$|\downarrow\rangle$ = état délocalisé de la bande inférieure.

$$E = -M_z B_z = - \underbrace{\left(\frac{g q \hbar}{2m} \frac{B_z}{2} \right)} \sigma_z.$$

\downarrow Matrice \downarrow Matrice 2x2 de Pauli.

$$= - \underbrace{\frac{g \hbar}{2}} \sigma_z.$$

$$\hbar = [J \cdot s] \quad \text{et} \quad g = \left[\frac{1}{5} \right] = \mu_B.$$

Le spin $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \uparrow \downarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

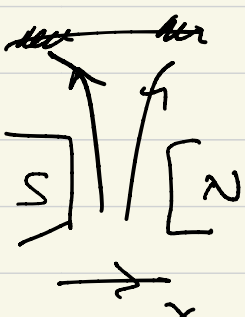
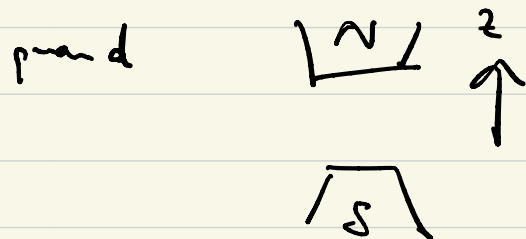
$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

trace sur cette matrice décrit les résultats de mesure

$|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$

(tête sup) (tête inf)



Définition 3 Matrices de Pauli (2x2)

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Comp x du Moment Magn $M_x = \gamma \frac{\hbar}{2} \sigma_x$

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ Comp y du Mom Magn $M_y = \gamma \frac{\hbar}{2} \sigma_y$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Comp z du Mom Magn $M_z = \gamma \frac{\hbar}{2} \sigma_z$

Énergie pot du Mom Magn (ou du "spin") dans

\vec{B} :

$$E = -g \frac{q}{2m} \frac{\hbar}{2} (\vec{B}_x \sigma_x + \vec{B}_y \sigma_y + \vec{B}_z \sigma_z).$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ 2 \times 2 \end{array} = -g \frac{q}{2m} \frac{\hbar}{2} \underbrace{\vec{B} \cdot \vec{\sigma}}_{\text{produit scalaire}}.$$

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} &= B_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + B_y \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + B_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_z & B_x + iB_y \\ B_x - iB_y & -B_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Prochaine fois : Dym du spin dans \vec{B} est régie par cette énergie potentielle.

Construire des évolutions unitaires associées à cette matrice.

Etats Propres et val propres des Matrices de Pauli

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|.$$

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \sigma_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle & \text{état propre } |\uparrow\rangle \text{ avec v.p. } +1. \\ \sigma_z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle & \text{état propre } |\downarrow\rangle \text{ avec v.p. } -1. \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} \sigma_x |+\rangle = |+\rangle \\ \sigma_x |-\rangle = -|-\rangle \end{cases} \quad \begin{aligned} |+\rangle &= \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \\ |-\rangle &= \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$\underbrace{|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|}_{= \sigma_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y |\Theta\rangle = |\Theta\rangle \text{ et } |\Theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y |\Omega\rangle = |\Omega\rangle \text{ et } |\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_y = (+1)|\Theta\rangle\langle\Theta| + (-1)|\Omega\rangle\langle\Omega|.$$