Notion de Matrice Densité / Entropie de von Neuman

1. * Généralise la notion d'état quantique.

2. * Entropie de von Neumann.

3. * Entropie pour un qubit.

#.

1) Notion de Matrice densité :

. état quantique vecteur de $\mathcal{H}$.

pour un qubit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ et $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$= \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

avec α et $\beta \in \mathbb{C}$ satisfont à la

contrainte de normalisation $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

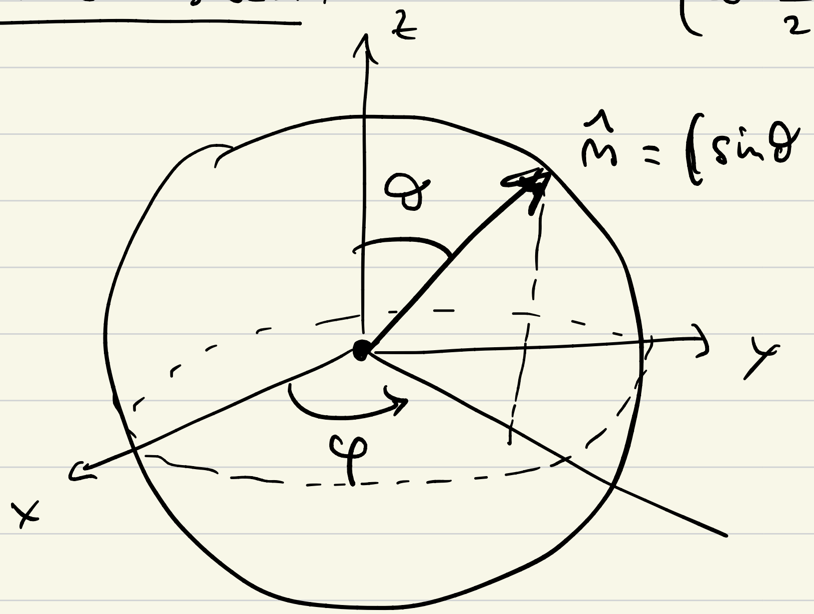
. Representation géométrique des états. de $\mathbb{C}^2$

$\longrightarrow$

Sphère de Bloch.

$$\alpha = \left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right) \text{ et } \beta = \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right) e^{i\varphi}$$

$$\hat{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta)$$



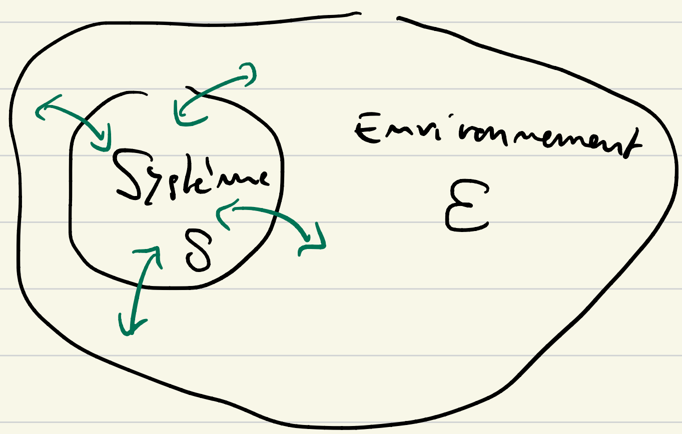
Ces états = vecteurs de l'espace de Hilbert décrivent des systèmes quantiques isolés de l'environnement.

On appelle ces états des "<u>ÉTATS PURS</u>"

Nouveau type d'état : ÉTAT MIXTE

Deux situations physiques pour lesquelles on a besoin de la notion d'état mixte.

a) Système qui n'est pas isolé



$$\underbrace{S \cup \mathcal{E}}$$

$S \cup \mathcal{E}$ = système total est isolé et le principe usuel de MQ s'applique.

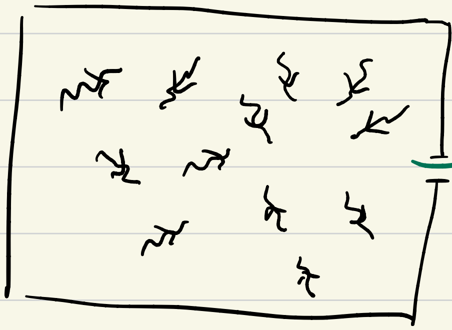
état du système total est pur $|\psi\rangle$

vecteur de l'espace d'Hilbert $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Question : comment obtenir une description réduite de S lui-même. Sans faire appel à l'environnement.

Distr de probabilité
synonyme

b) Situation d'un $\boxed{\text{"ensemble"}}$ de degrés de libertés ou de qubits. <u>Exemple</u> :



photon qui sont
la probabilité que le photon soit de l'état $|\varphi_i\rangle$ $i = 1 \cdots m$ est ici égale à p_i.

- gaz de photons / gaz de qubits ou de degrés de liberté de polarisation des photons.

- N photons au total et

fraction p_1 de photons qui ont la pol de l'état $|\varphi_1\rangle \in \mathbb{C}^2$.

fraction p_2 " " $|\varphi_2\rangle$

$\vdots$

fraction p_m de photons ... $|\varphi_m\rangle$.

$$\begin{cases} 0 \leq p_1 \leq 1, \ 0 \leq p_2 \leq 1, \ \ldots \ 0 \leq p_m \leq 1. \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1. \end{cases}$$

ces fractions sont des probabilités.

Dans les deux situations a) et b) la même notion et formalisme des états MIXTES permet de décrire la physique du système.

Etat Mixte ou Matrice Densité (en nous basant sur la situation b) du jet de photon).

- Un photon pris au hasard dans la boîte est dans l'état $\underbrace{|\varphi_i\rangle}_{\substack{\in \mathbb{C}^2 \\ \text{vecteur}}}$ ou bien $\underbrace{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}_{\substack{\text{projecteur ou} \\ \text{matrice } 2\times 2 \text{ sur} \\ \text{le vecteur } |\varphi_i\rangle}}$ avec prob p_i.

- Matrice densité : superposition convexe des projecteurs :

$$\boxed{\underbrace{\rho \equiv \sum_{i=1}^{m} p_i \underbrace{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}_{\text{Mat } 2\times 2}}_{\text{Mat } 2\times 2 \text{ pour un ensemble de qubits}}}$$

Remarques.

1) Superposition $\overbrace{\text{des}}^{\text{convexe}}$ vecteurs donnerait un nouveau vect

→ Rien de Nouveau.

2) Superposition convexe des projecteurs (si elle non-triviale)

donne autre chose qu'un projecteur !

→ Un objet nouveau ρ n'est pas un proj en général.

3) ρ est la bonne quantité qui permet de décrire

les valeurs moyenne et la variance des mesures

expérimentales.

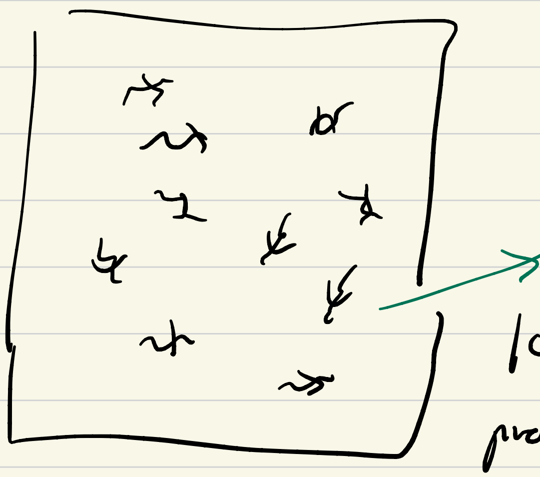
c.à.d que <u>ρ se comporte un peu comme une</u>

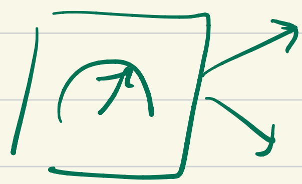
<u>sorte de distr de probabilité</u>. qui <u>décrit le syst</u>

<u>quantique</u>

Explication du 3ème point :

Mesure de polarisation ;





Labo : Mesure la pol linéaire

$|\alpha\rangle$; $+1$

$|\alpha_\perp\rangle$; -1

$|\varphi_i\rangle$ avec probabilité p_i avant la mesure.

Après la mesure

- état est $|\alpha\rangle$ avec $\text{prob} = |\langle\alpha|\varphi_i\rangle|^2$
- état est $|\alpha_\perp\rangle$ avec $\text{prob} = |\langle\alpha_\perp|\varphi_i\rangle|^2$

Valeur Moyenne de la pol

$$\text{Val Moy de Pol} = \sum_{i=1}^{m} p_i \left((+1)\underbrace{|\langle\alpha|\varphi_i\rangle|^2} + (-1)\underbrace{|\langle\alpha_\perp|\varphi_i\rangle|^2} \right)$$

un peu d'algèbre

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\langle\varphi_i|\alpha\rangle\langle\alpha|\varphi_i\rangle - \langle\varphi_i|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|\varphi_i\rangle \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i \langle\varphi_i| \underbrace{\left(|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| \right)}_{A \text{ observable polarisation.}} |\varphi_i\rangle$$

$$\text{Val Moy de } A = \sum_{i=1}^{m} p_i \underbrace{\langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle}$$

↑ on a déjà vu cette formule.

... toujours un peu d'algèbre ici !

$$\text{Val Moy de } A = \sum_{i=1}^{m} p_i \underbrace{\mathrm{Tr}\left(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| A \right)}_{= \langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle}$$

la Trace d'une matrice = somme des éléments diag.

pourquoi ? parce que la Tr est cyclique $\mathrm{Tr}\, BA = \mathrm{Tr}\, AB$

$\mathrm{Tr}\, ABC = \mathrm{Tr}\, CAB$
$= \mathrm{Tr}\, BCA$.

Ici : $\langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle$ Matr 1x1

$= \mathrm{Tr} \langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle$

$= \mathrm{Tr} \left(|\varphi_i\rangle \langle \varphi_i | A \right)$.

Par linéarité de Tr :

$$\text{Val Moy de } A = \mathrm{Tr}\left\{ \left(\sum_{i=1}^{m} p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \right) A \right\}$$

$$= \mathrm{Tr}\{\rho A\}.$$

Cela justifie la remarque 3). et l'utilisation de ρ.

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|.$$

Val Moy de A $= \mathrm{Tr}(\rho A)$.

observable

Variance de A lors de Mesures expérimentales $= \mathrm{Tr}\, \rho A^2 - (\mathrm{Tr}\, \rho A)^2$

val Moy de A^k $= \mathrm{Tr}(\rho A^k)$.

"Moments"

- D'une certaine manière vous voyez ρ joue le role de distr de prob, Analogue à :

X v.a classique $X \sim P_X(\cdot)$. continue.

$$\underbrace{\mathbb{E}(X^k)}_{\text{" Val Moy } A^k} = \underbrace{\int dx}_{= \text{"Tr"}} \underbrace{x^k}_{(A^k} \underbrace{P_X(x)}_{\rho)\text{"}}.$$

2) Propriétés générales des matrices densités :

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} p_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| .$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{superposition convexe de } \quad |\varphi_i\rangle \in \mathcal{H} \quad i = 1 \dots m \\ \text{ici} \quad 0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 . \end{array} \right.$

- $|\varphi_i\rangle$ ne forment pas nécessairement une base ou base orthonormée de $\mathcal{H}$.

- si les $|\varphi_i\rangle$ forment une base orthonormée dans ce cas.

ρ est une matrice diagonale dans cette base. Ici $\dim \mathcal{H} = m$

$$\rho = \begin{pmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_m \end{pmatrix}$$

pour qubit $\dim \mathbb{C}^2 = 2$ et $\rho = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas particulier $\rho \Longleftrightarrow \{p_1 \text{ et } p_2\}$ se comporte comme une distrib prob classique.

- $\underline{\underline{\rho^{T,*} = \rho}} \Longleftarrow \rho = \sum_{i=1}^{m} p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$

- ρ est une matrice <u>semi</u>-définie positive. $\rho \succsim 0$.

toutes les valeurs propres de la matrice ρ sont ≥ 0.

On peut le voir de la façon suivante :

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{m} p_i \langle\psi|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\psi\rangle.$$

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i |\langle\psi|\varphi_i\rangle|^2 \geq 0.$$

$\Rightarrow$ En particulier dans n'importe quelle base les éléments de matrice diagonaux de ρ sont ≥ 0.

$\Rightarrow$ En particulier ceci est vrai dans la base qui diagonalise ρ et donc les v.p de ρ sont ≥ 0.

$\int dx \, P_X(x) = 1$

<u>Analogue.</u>

- <u>Normalisation de ρ</u> : $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$

<u>Preuve</u> :
$$\mathrm{Tr}\,\rho = \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{m} p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} p_i \underbrace{\mathrm{Tr}(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|)}_{\underbrace{\mathrm{Tr}\,\langle\varphi_i|\varphi_i\rangle}_{1}}$$

cyclicité

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Représentation de la Boule de Bloch par une matrice densité d'un qubit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.

$\rho_{1\,qubit}$ = Matrice 2×2. définie positive, avec $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$.

- soit λ_1 et λ_2 les deux $\underbrace{\text{v.p}}_{\text{réelles}}$ de la matrice.

$\mathrm{Tr}\,\rho = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

- $\mathrm{Det}\,\rho = \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$.

Alors en utilisant la base des Matrices de Pauli de l'espace des Matrices 2×2 :

$$\rho = \frac{r}{2} I + \frac{a_1}{2} \overset{\sigma_x}{X} + \frac{a_2}{2} \overset{\sigma_Y}{Y} + \frac{a_3}{2} \overset{\sigma_Z}{Z}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rotation et nous placer dans une base. $\nexists$, ρ.

$$\tilde{\rho} = \frac{r}{2} I + \frac{a}{2} Z = \begin{pmatrix} \frac{r}{2}+\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{r}{2}-\frac{a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Tr}\,\rho = \mathrm{Tr}\,\tilde{\rho} = \left(\frac{r}{2}+\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{r}{2}-\frac{a}{2}\right) = \underline{\underline{r = 1}}.$$

$$\mathrm{Det}\,\rho = \mathrm{Det}\,\tilde{\rho} = \left(\frac{r}{2}+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{r}{2}-\frac{a}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} \geq 0}}.$$

$$\Rightarrow \quad a^2 \leq 1.$$

Par rotation le vect $(a_1, a_2, a_3) \to (0, 0, a)$.

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2 = \|(0,0,a)\|^2$$

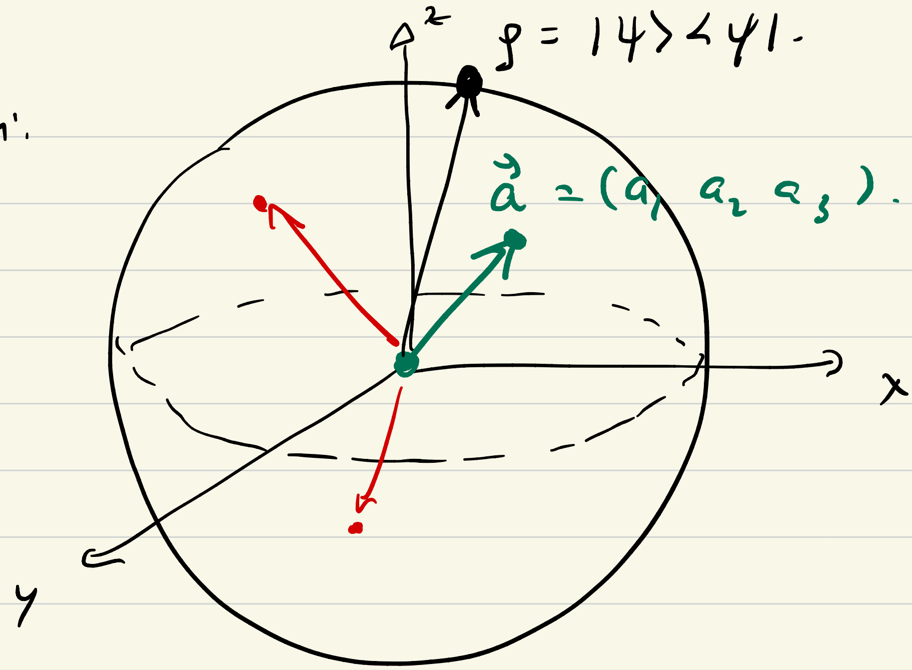
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{Pour } \rho = \frac{1}{2}(I + a_1 X + a_2 Y + a_3 Z) \\ \text{il faut que } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq 1. \end{array}}$$

vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in$ Boule de rayon 1

Boule de Bloch.

Boule de Bloch.

pour 1 qubit,



$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{a}.\vec{\Sigma}) \qquad \vec{\Sigma} = (X, Y, Z)$$
$$= (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$\|\vec{a}\| \leq 1$.

• Représentation des Matrices Densité comme l'intérieur de la boule

• Question : . que représente l'origine $\vec{a} = 0 \Rightarrow \rho = \frac{1}{2} I = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

v.a de Bernoulli.

• Question : que représente la surface de la boule → sphère de Bloch.

états purs.

$\|\vec{a}\| = 1$, on a $\rho^2 = \rho$.

↑

exercice qui utilise $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$.

$$\begin{cases} \sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x \\ \sigma_x \sigma_z = -\sigma_z \sigma_x \\ \sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y . \end{cases}$$

$\rho^2 = \rho \Rightarrow \rho$ est un projecteur.

$$\Rightarrow \rho = |\psi\rangle\langle\psi| .$$

ρ est un état pur.

<u>Plus concrètement:</u> si $\|\vec{a}\| = 1$.

$$\vec{a} = \hat{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

$\rho = \frac{1}{2}(I + \hat{n}\cdot\vec{\Sigma})$ on peut voir

que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

avec $|\psi\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\underbrace{|0\rangle}_{|\uparrow\rangle} + \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}\underbrace{|1\rangle}_{|\downarrow\rangle}$.

<u>Prochaine fois dernier cours:</u>

* Entropie von Neumann associée à ρ.
  Généralise la notion d'entropie de Shannon.

* Revisité la notion d'<u>intrication</u>. grâce à ρ et à l'entropie.