# Matrices densité, l'entropie de von Neuman, entropie d'intrication.

## Rappel sur les matrices densité.

Ensemble de degrés de lib (pol de photons ds un jet ou ens de spins nucléaires)

ds des états $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots |\varphi_K\rangle \in \mathcal{H}$

avec prob $p_1, p_2, \dots p_K$.

Fraction de photons / spins nucléaires dans l'état $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ etc...

Cet ensemble est correctement décrit par une matrice densité (ou état <u>mixte</u>).

$$\begin{cases} \rho = \sum_{i=1}^{K} p_i \underbrace{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}_{\text{matrice: } \dim\mathcal{H} \times \dim\mathcal{H}} \\ 0 \leq p_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{K} p_i = 1. \end{cases}$$

ici $|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| =$ projecteur sur l'état pur $|\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}$.

## Propriétés importantes.

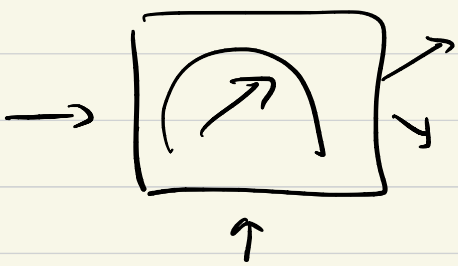
· $\rho^{T,*} = \rho$.

· $\rho \succeq 0$ semi-définie positive. $(0 \le p_i \le 1)$

· $\mathrm{Tr}\,\rho = 1 \iff \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

## Aussi son importance vient de la propriété suivante :

vous décrivez tous les résultats de mesures sur l'ens des états grâce à la matrice densité.



$\rho$

$|\alpha\rangle$, $+1$ prob $= \sum_{i=1}^{k} |\langle \varphi_i | \alpha \rangle|^2 p_i$

$|\alpha_\perp\rangle$, $-1$ prob $= \sum_{i=1}^{k} \langle \varphi_i | \alpha_\perp \rangle|^2 p_i$

base des vecteurs propres de l'observable $A$

$$\boxed{\text{Val Moy de } A = \mathrm{Tr}\,\rho A.}$$

par ex : $A = (+1)\,|\alpha\rangle\langle\alpha| + (-1)\,|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|$

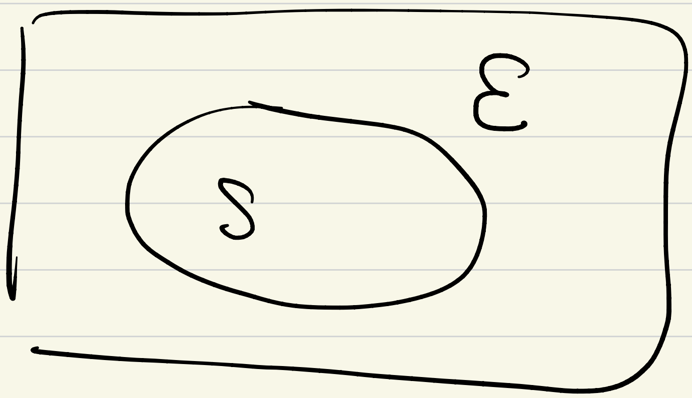
$$\Rightarrow \text{Val Moy de } A = (+1)\sum_{i=1}^{k} |\langle \varphi_i|\alpha\rangle|^2 p_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \langle \varphi_i|\alpha_\perp\rangle p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \left( \langle \varphi_i|\alpha\rangle\langle\alpha|\varphi_i\rangle - \langle\varphi_i|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|\varphi_i\rangle \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle = \underline{\underline{\mathrm{Tr}\, A\rho}}.$$

## Autre point de vue sur la matrice densité :

$\rho$ décrit aussi une partie $S$ d'un système constitué de $S + \underbrace{\text{Environnement}}_{\mathcal{E}}$.




" $S \cup \mathcal{E}$ tout l'univers "

<u>hyp</u> : syst total est décrit par état pur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{tot}$.

ici $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

$\boxed{\text{Affirmation}}$ : la partie réduite $S$ est décrite par une matrice densité $\rho_S$

Opération mathématique pour obtenir $\rho_S$ est appelée une trace partielle. On va en parler maintenant.

# Notion de Trace partielle.

- ici on a une matrice associée à l'état pur $|\psi\rangle$ ;

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E .$$

projection sur $|\psi\rangle$

$$\underbrace{\boxed{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_E}}}_{} \underbrace{|\psi\rangle\langle\psi|}_{\dim\mathcal{H}_S \dim\mathcal{H}_E \times \dim\mathcal{H}_S \dim\mathcal{H}_E} = \underbrace{\rho_S}_{\text{matrice : } \dim\mathcal{H}_S \times \dim\mathcal{H}_S} .$$

dim$\mathcal{H}_S$ dim$\mathcal{H}_E$

$\times$ dim$\mathcal{H}_S$ dim$\mathcal{H}_E$.

matrice : dim$\mathcal{H}_S$ $\times$ dim$\mathcal{H}_S$

Trace partielle.

élimination des degrés de liberté de l'environnement.

## Analogie classique

distr de prob jointe $\quad P(x, y)$.

marginal en faisant $\quad q(x) = \int dy\, P(x, y)$.

autre marginale : $\quad \ell(y) = \int dx\, P(x, y)$.

Trace partielle ici est une trace usuelle qui porte sur $\mathcal{H}_\varepsilon$.

$\mathcal{H}_S$ base $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle \dots |\alpha_J\rangle$ $J = \dim \mathcal{H}_S$.

$\mathcal{H}_\varepsilon$ " $|\beta_1\rangle$ $|\beta_2\rangle \dots |\beta_K\rangle$ $K = \dim \mathcal{H}_\varepsilon$.

$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_\varepsilon$ base $|\alpha_j\rangle \otimes |\beta_\ell\rangle$ $j = 1 \dots J$, $\ell = 1 \dots K$.

$JK = \dim \mathcal{H}_S \dim \mathcal{H}_\varepsilon$ élts de base

$$|\psi\rangle = \sum_{j,\ell=1}^{J,K} c_{j\ell} \underline{|\alpha_j\rangle \otimes |\beta_\ell\rangle}$$

$$\underbrace{|\psi\rangle\langle\psi|}= \sum_{j,\ell} \sum_{j'\ell'} c_{j\ell}\, c^*_{j'\ell'} |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_\ell\rangle \langle\alpha_{j'}| \otimes \langle\beta_{\ell'}|$$

$$= \sum_{j,\ell} \sum_{j'\ell'} c_{j\ell}\, c^*_{j'\ell'} \underbrace{\left(|\alpha_j\rangle\langle\alpha_{j'}|\right)}_{\substack{\text{Matrice dans} \\ \mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_S}} \otimes \underbrace{\left(|\beta_\ell\rangle\langle\beta_{\ell'}|\right)}_{\substack{\text{Matrice :} \\ \mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{H}_\varepsilon}}$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\varepsilon} |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{j,\ell} \sum_{j'\ell'} c_{j\ell}\, c^*_{j'\ell'} |\alpha_j\rangle\langle\alpha_{j'}| \underbrace{\left(\mathrm{Tr}\, |\beta_\ell\rangle\langle\beta_{\ell'}|\right)}$$

$$\mathrm{Tr} \langle\beta_{\ell'}|\beta_\ell\rangle = \delta_{\ell'\ell}$$

Trace partielle $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\varepsilon}$ faire la trace sur cette matrice.

$$\underbrace{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\varepsilon} |\psi\rangle\langle\psi|}_{\text{Matrice : } \mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_S.} = \sum_{j\,j'} \left\{ \sum_{\ell} c_{j\ell}\, c^*_{j'\ell} \right\} \underbrace{|\alpha_j\rangle\langle\alpha_{j'}|}_{\text{Matrice : } \mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_S.} .$$

Remarque : on peut faire la trace partielle p. rapport à $\mathcal{H}_S$

$$\underbrace{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S} |\psi\rangle\langle\psi|}_{\text{Matrice : } \mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{H}_\varepsilon} = \sum_{\ell\,\ell'} \left\{ \sum_{j} c_{j\ell}\, c_{j\ell'} \right\} \underbrace{|\beta_\ell\rangle\langle\beta_{\ell'}|}_{\text{Matrice : } \mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{H}_\varepsilon.}$$

Remarque :

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\varepsilon} |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_j \sum_\ell |c_{j\ell}|^2 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\varepsilon} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S} |\psi\rangle\langle\psi| .$$

$$= \underbrace{\mathrm{Tr}}_{\text{trace total sur } \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_\varepsilon .} |\psi\rangle\langle\psi| . \qquad \checkmark$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_\varepsilon} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\varepsilon} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S} .}$$

# Matrice densité réduite


. état total $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$.

. $\Leftrightarrow$ $|\psi\rangle\langle\psi|$ . projecteur.

. si on veut décrire uniquement $S$

on utilise $\rho_S \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} |\psi\rangle\langle\psi|$.

$\neq 1$.

**Affirmation :** Si on mesure une observable $A$ qui vit uniquement dans $S$ (p. ex pol d'un photon dans $S$)

les résultats de la mesure satisfont à :

$$\boxed{(\text{val Moy de } A) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S}(\rho_S A .)}$$

où $A$ : Mat $\mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_S$ ; $A^{T,*} = A$.

**Preuve :** Mesure $A \otimes \mathbb{1}_\mathcal{E}$. Remarque que $|\psi\rangle\langle\psi|$ Mat densité pour $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_\mathcal{E}$.

$$\Rightarrow \text{Val Moy}(A) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S\otimes\mathcal{H}_\mathcal{E}} A\otimes \mathbb{1}_\mathcal{E} |\psi\rangle\langle\psi| = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_S} A \underbrace{\left(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} |\psi\rangle\langle\psi|\right)}_{\rho_S} . \blacksquare$$

# Entropie quantique de von Neuman.

- Rappel sur l'entropie de Shannon pour une distr de probabilité $\underbrace{P(X)}_{\text{v.a.}}$. $x = a_1, a_2, \dots, a_K$.

$$H(X) \equiv - \sum_{x \in \{a_1 \dots a_K\}} p(x) \ln p(x).$$

Propriétés importantes :

a) $H(X) \geq 0$.

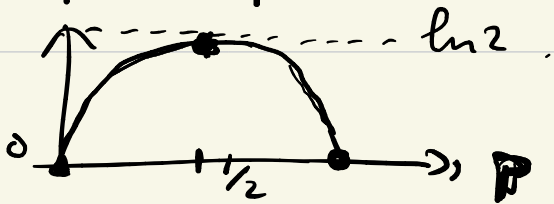
b) $H(X)$ est maximale si $p(x = a_i) = \dfrac{1}{K}$.

$$H_{max} = - \cancel{K} \cdot \frac{1}{\cancel{K}} \ln \frac{1}{K} = (\ln K).$$

c) si un bit $p(x=0) = p$ et $p(x=1) = 1-p$.

$$H(X) = h(p) = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p)$$

Ceci est maximum en $p = \frac{1}{2}$



## Entropie von Neumann

. Matrice densité $\rho$ $\nearrow$ décrit ensemble / $\searrow$ une partie d'un syst.

$$S(\rho) = -\operatorname{Tr}(\rho \ln \rho) .$$

$\#$.

## Que veut dire $\ln \rho$ en fait ?

$$\begin{cases} \rho^{T,*} = \rho & (\text{hermitienne}) \\ \rho \geqslant 0 & (\text{semi-définie positive ; val propre} \geq 0) \\ \operatorname{Tr} \rho = 1 . \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\rho$ possède une décomposition spectrale t.q

$$\rho = \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}} \lambda_i \, |\chi_i\rangle\langle\chi_i|$$

$$\rho\,|\chi_i\rangle = \lambda_i\,|\chi_i\rangle$$

$\{|\chi_i\rangle \; i = 1 \dots \dim \mathcal{H}_S\}$ forme une base orthonormée

$0 \leq \lambda_i \leq 1$ ; $\sum_{i=1} \lambda_i = 1$.

. Par définition une $\underbrace{\text{fonction}}_{f}$ de $\rho$ est donnée par :

$$f(\rho) = \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_S} f(\lambda_i)\ |\chi_i\rangle\langle\chi_i| .$$

dans la base où $\rho$ est diag $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\dim \mathcal{H}_S} \end{pmatrix}$

$f(\rho)$ est aussi diag $\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_{\dim \mathcal{H}_S}) \end{pmatrix}$

. En particulier

$$\ln \rho = \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_S} (\ln \lambda_i)\ |\chi_i\rangle\langle\chi_i| .$$

$$\rho \ln \rho = \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_S} (\lambda_i \ln \lambda_i)\ |\chi_i\rangle\langle\chi_i| .$$

↑ Matrice diag de la base $\{|\chi_i\rangle ; i=1 \cdots \dim \mathcal{H}_S\}$
avec v.p $(\lambda_i \ln \lambda_i)$.

$$\Rightarrow \boxed{S(\rho) = -\mathrm{Tr}\,\rho \ln \rho = -\sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_S} \lambda_i \ln \lambda_i} .$$

Pour calculer $S(\rho)$ on passe de la base qui diagonalise $\rho$ et on calcule cette somme.

Interprétation.

$$S(\rho) = -\sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_S} \lambda_i \ln \lambda_i$$

comme une "entropie de Shannon" pour

la distr. de probabilité donnée par

$\{ \lambda_i \,,\ i = 1 \,... \dim \mathcal{H}_S \}$ les v.p de $\rho$.

Rappel : $0 \leq \lambda_i \leq 1$ , $\mathrm{Tr}\,\rho = 1 = \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_S} \lambda_i$ .

#.

Propriétés importante.

- $S(\rho) \geqslant 0$.
- $S(\rho)$ va être maximale si $\lambda_i = \dfrac{1}{\dim \mathcal{H}_S}$.

$$\Leftrightarrow \quad \rho = \frac{1}{\dim \mathcal{H}_S} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ ← vrai dans n'importe quelle base.

**Remarque :** pour un état pur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ la matrice densité associée est $|\psi\rangle\langle\psi|$.

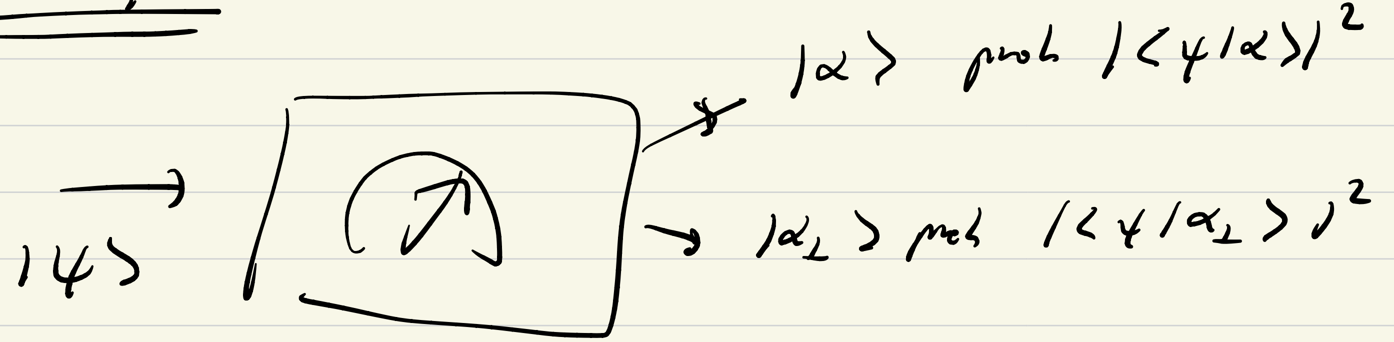
$p = 1$.

$$S(|\psi\rangle\langle\psi|) = -\underbrace{1 \ln 1}_{0} - \underbrace{0 \ln 0}_{0} = 0.$$

- L'entropie d'un état pur est nul ! Dans un état pur tout est complètement déterminé de ce point de vue.

- Par contre l'entropie d'un <u>état mixte</u> $\rho$ n'est pas nulle.

**Remarque :**




(Si vous n'enregistrez pas le résultat des mesures vous avez un ensemble d'états et l'entropie augmente.)

# Entropie d'un bit quantique.

Rappel pour un bit classique $h_2(p) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p)$.

$p = P(x=0)$ $\qquad 1-p = P(x=1)$.

Bit quantique : $\quad \rho = \frac{1}{2}(I + \vec{a}\cdot\vec{\sigma})$.

$\|\vec{a}\| \leq 1 \to$ Boule de Bloch.

$\vec{\sigma} = (X, Y, Z)$.

#.

$\mathrm{Tr}(\rho\ln\rho)$ invariante sous les chg de base donné par des rotations $\to$ $\mathrm{Tr}\,\rho\ln\rho = \mathrm{Tr}\,\tilde{\rho}\ln\tilde{\rho}$ ou ici

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2}(I + \tilde{a}\cdot\vec{\sigma}) = \frac{1}{2}(I + \|\vec{a}\|Z)$$

avec $\tilde{a} = (0, 0, \|\vec{a}\|)$.

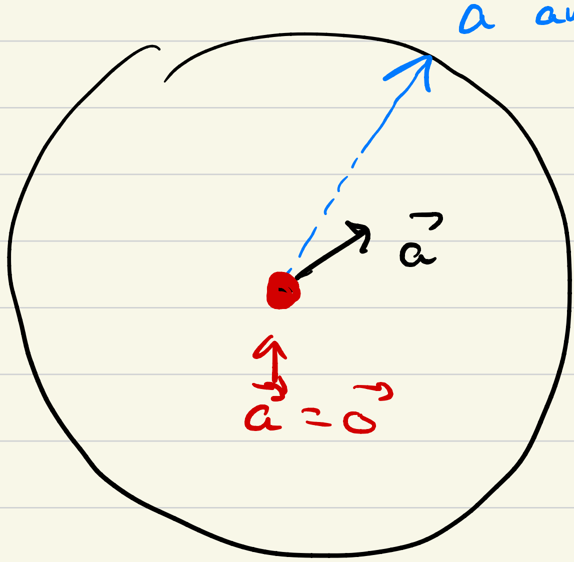
$$\Rightarrow \tilde{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|a\| & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\|a\| \end{pmatrix}$$

$$S(\rho) = S(\tilde\rho) = -\frac{1}{2}(1+\|\vec a\|)\ln\frac{1}{2}(1+\|\vec a\|) - \frac{1}{2}(1-\|\vec a\|)\ln\frac{1}{2}(1-\|\vec a\|).$$

## Boule de Bloch.

$\vec a$ avec $\|\vec a\| = 1$ $\rightarrow$ état pur.

$S(\text{état pur}) = 0.$




$$S\left(\frac{1}{2} I\right) = \ln 2.$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Notion d'entropie d'intrication.

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \ni |\psi\rangle .$$

$\mathcal{H}_A \leftarrow S$, $\mathcal{H}_B \to \mathcal{E}$.

par ex :
- état produit.
- état intriqué.

**Définition** : on appelle entropie d'intrication la quantité suivante :

$$S(\rho_A) = -\mathrm{Tr}\, \rho_A \ln \rho_A \quad \text{ou} \quad \rho_A = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B} |\psi\rangle\langle\psi| .$$

$$S(\rho_B) = -\mathrm{Tr}\, \rho_B \ln \rho_B \quad \text{ou} \quad \rho_B = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_A} |\psi\rangle\langle\psi| .$$

**Théorème** : $S(\rho_A) = S(\rho_B)$.

(vrai car $|\psi\rangle$ est état pur et $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ est bipartite.).

**Question** : pourquoi cette déf "entropie d'intrication".

**Réponse** : $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ fournit une sorte de mesure de la quantité d'intrication dans l'état $|\psi\rangle$.

Exemple.

• Etats produits : $\exists$ $|\chi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ et $|\chi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$ t.q

$$\underset{\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B}{\underset{\cap}{|\psi\rangle}} = |\chi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle .$$

$*$ $S(|\psi\rangle\langle\psi|) = S\left( |\chi_A\rangle\langle\chi_A| \otimes |\chi_B\rangle\langle\chi_B| \right).$

$= 0$ . car l'état est pur.

$*$ $\rho_A = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B} \left(|\chi_A\rangle\langle\chi_A| \otimes |\chi_B\rangle\langle\chi_B|.\right)$

$$= |\chi_A\rangle\langle\chi_A| \underbrace{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B} |\chi_B\rangle\langle\chi_B|}_{\langle\chi_B|\chi_B\rangle = 1.}$$

$\Rightarrow \boxed{\rho_A = |\chi_A\rangle\langle\chi_A.} \Rightarrow \boxed{S(\rho_A) = 0.}$

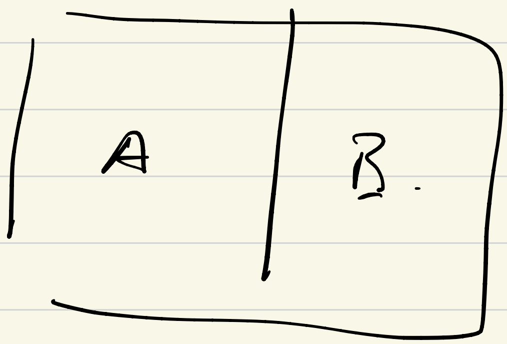
état pur.

$*$ $\boxed{\rho_B = |\chi_B\rangle\langle\chi_B|} \Rightarrow \boxed{S(\rho_B) = 0}$

PAS D'INTRICATION !!!

- **Etats de Bell.**

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle\Big).$$




$S(\rho) = 0$.

Mat densité totale / état pur.

- $\rho = |B_{00}\rangle\langle B_{00}|$.
- $\rho_A = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B} |B_{00}\rangle\langle B_{00}|$ et $S(\rho_A) = \,?$
- $\rho_B = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_A} |B_{00}\rangle\langle B_{00}|$ et $S(\rho_B) = \,?$

$$|B_{00}\rangle\langle B_{00}| = \frac{1}{2}\Big(|0\rangle\otimes|0\rangle + |1\rangle\otimes|1\rangle\Big)\Big(\langle 0|\otimes\langle 0| + \langle 1|\otimes\langle 1|\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big( |0\rangle\langle 0|_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B + |0\rangle\langle 1|_A \otimes |0\rangle\langle 1|_B + |1\rangle\langle 0|_A \otimes |1\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_A \otimes |1\rangle\langle 1|_B \Big).$$

$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B} |0\rangle\langle 0| = 1$ et $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B} |1\rangle\langle 0| = 0$ ect...

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B} |B_{00}\rangle\langle B_{00}| = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0|_A + |1\rangle\langle 1|_A\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A .$$

$$\rho_B = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_A} |B_{00}\rangle\langle B_{00}| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_B .$$

et
$$\begin{cases} S(\rho_A) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln 2 . \\ S(\rho_B) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln 2 \end{cases}$$

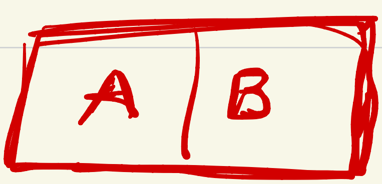
Maximum pour 1 bit quantique

" .

<u>L'intrication est Maximale.</u> L'état de Bell est maximalement intriqué.

**Résumé** Entropie de la partie A ou B d'un syst bipartite (dans un état global pur) est une mesure d'intrication.

En particulier les états de Bell sont maximalement intriqués




$S(A \cup B) = 0$. Mais

$S(A) = S(B) = \ln 2$.