Analyse avancée II – Série 0A

Remarque générale :
L'exercice 6 (au verso) consiste d'une question de type Vrai ou Faux (V/F). Ce type de questions réapparaîtra tout au long du semestre. Pour une telle question, répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Échauffement. (Solutions générales)

Quelle est la solution générale de chacune des équations suivantes?

i) $y' = 2x$ *ii)* $y'' = a$, où $a \in \mathbb{R}$ *iii)* $y' = y + 1$ *iv)* $y' + \dfrac{y}{x} = 0$

Exercice 1. (Propriétés d'équations différentielles)

Déterminer l'ordre des équations différentielles suivantes, et déterminer si l'équation est autonome ou non autonome :

i) $3y''' + 1 = 0$ *ii)* $\ln(x)\, y' - x^2\, y + e^{-2x} = 0$ *iii)* $\sin(x)\, y' - \sin(y) = 0$

iv) $\dfrac{(y')^2}{\sqrt{x^2+5}} + \dfrac{y}{x} = 0$ *v)* $y''\, y' + \cos(\pi x) = 0$ *vi)* $y'' - 3(y')^2 + 4xy = 0$

vii) $y''' + y'' + y' + y + \sinh(x) = 0$

Exercice 2. (Équation linéaire à coefficients constants)

i) Vérifier que pour $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, les fonctions $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ satisfont l'équation

$$y'' + \omega^2 y = 0\,. \tag{1}$$

ii) Quelle est la solution générale de (1) pour $\omega = 0$?

iii) Si $\omega = \frac{\pi}{2}$, donner les valeurs de C_1 et C_2 de sorte que $y(1) = 3$ et $y'(1) = 2$.

Exercice 3. (Équations linéaires)

i) Vérifier que pour $x \notin \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ les fonctions $y(x) = 1 + x\tan(x) + C\big(\cos(x)\big)^{-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$ satisfont l'équation

$$y' - \tan(x)\, y = x\,.$$

ii) Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$ les fonctions $y(x) = 2\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{3}{2} + Ce^{-\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ satisfont l'équation

$$y' + y\cos(x) = \cos(x)^3.$$

Ex. 4 - 6 au verso.

Exercice 4. (Différentielle exacte)

Vérifier que les fonctions y données ci-dessous satisfont l'équation

$$y'\,\frac{2y(x-1)}{y^2+1}+\ln(y^2+1)=0\ .$$

i) $y(x)=0$ pour $x\in\mathbb{R}$.

ii) $y(x)=\pm\sqrt{e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}-1}$, pour, respectivement, $x>1$ et $C>0$, ou $x<1$ et $C<0$. Déterminer les valeurs de C de sorte que $y(2)=-3$ et $y\left(-\frac{3}{2}\right)=2$, respectivement.

Exercice 5. (Équation de Riccati)

i) Vérifier que pour $x>0$ la fonction

$$y(x)=x-\frac{2x}{1+xe^{-x}}$$

satisfait l'équation différentielle de Riccati

$$2x^2y'=(x-1)(y^2-x^2)+2xy \tag{2}$$

pour la condition initiale $y(1)=\dfrac{1-e}{1+e}$.

ii) Est-ce que cette solution est maximale ? Si non, donner la solution maximale pour la condition initiale donnée.

iii) Trouver toutes les conditions initiales pour lesquelles $y(x)$ est solution de (2).

Exercice 6. (V/F : Équations différentielles)

Q1 : Soit $y(x)$ une solution d'une équation différentielle sur un intervalle ouvert I. Alors $y(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur tout intervalle ouvert non-vide $J\subset I$.