

Analyse avancée II – Série 2B

Échauffement. (Linéarité)

Soient p et q deux fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + p(x)y = q(x)$. Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions quelconques de l'équation sur I , alors :

- i)* pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $\alpha + \beta = 1$ la fonction $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de l'équation.
- ii)* la fonction $y = y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène associée à $y' + p(x)y = q(x)$, c'est-à-dire de l'équation $y' + p(x)y = 0$.

Exercice 1. (Solution générale et problème de Cauchy)

Soit l'équation différentielle $2y^3 + 3xy^2y' = 0$. Déterminer

- i)* la solution générale.
- ii)* la solution maximale qui satisfait respectivement les condition initiales $y(1) = 2$, $y(1) = -2$, $y(-1) = 2$, $y(-1) = -2$ et $y(0) = 0$.

Exercice 2. (Familles de courbes orthogonales)

Trouver la famille des courbes orthogonales à la famille donnée et dessiner quelques membres de chaque famille.

- i)* $xy = c$, $c \in \mathbb{R}$
- ii)* $y^3 = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$
- iii)* $x^2 + 2y^2 = c$, $c \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 3. (Équations linéaires)

Trouver la solution générale des équations suivantes :

- i)* $y' + 4y = 3 \sin(2x)$
- ii)* $(1 + x^2)y' + xy = 4x\sqrt{1 + x^2}$

Exercice 4. (Équations de Bernoulli)

Trouver la solution générale des équations suivantes :

- i)* $y' - y = xy^4$
- ii)* $y' + 4y - 2(x + 1)y^3 = 0$
- iii)* $y' + \frac{y}{x} = x^2y^3$