EPFL
Section PH

Peter Wittwer
1 mars 2024

Analyse avancée II – Corrigé de la série 2B

Échauffement. (Linéarité)

i) Soit $y = \alpha y_1 + \beta y_2$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y' + p(x)y = (\alpha y_1 + \beta y_2)' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1' + \beta y_2') + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(y_1' + p(x)y_1) + \beta(y_2' + p(x)y_2) = \alpha q(x) + \beta q(x) = (\alpha+\beta)q(x) = q(x)$.

ii) Soit $y = y_1 - y_2$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y' + p(x)y = (y_1 - y_2)' + p(x)(y_1 - y_2) = (y_1' - y_2') + p(x)(y_1 - y_2) = (y_1' + p(x)y_1) - (y_2' + p(x)y_2) = q(x) - q(x) = 0$.

Exercice 1. (Solution générale et problème de Cauchy)

i) Solution générale

Pour commencer on constate que $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, est une solution. On procède par séparation des variables:

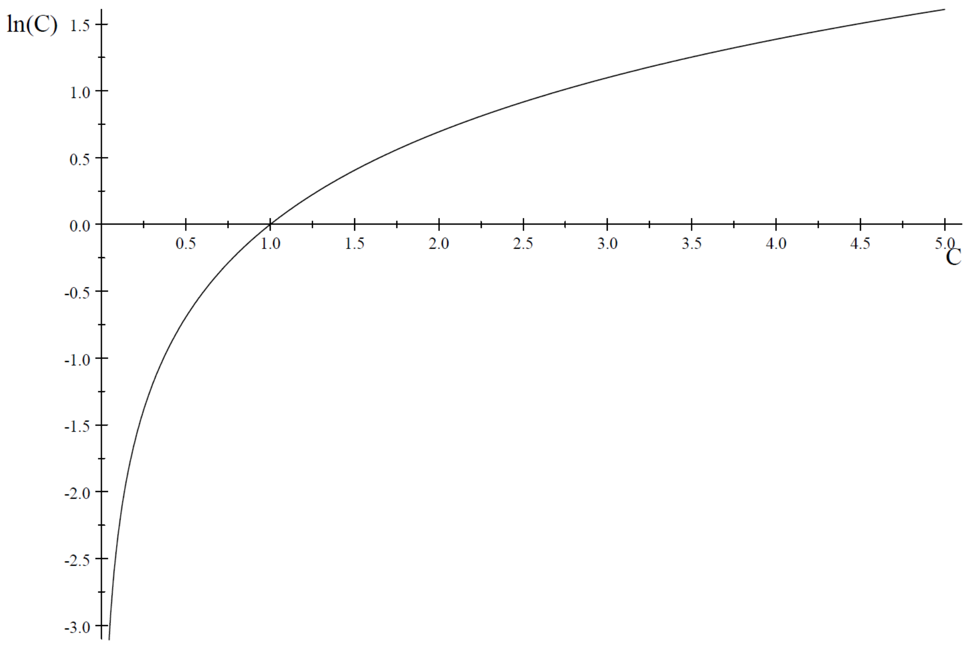
$$2y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\begin{array}{c} y \neq 0 \\ \Leftrightarrow \\ x \neq 0 \end{array} \quad 3\frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$$

et après intégration

$$3\ln(|y|) = -2\ln(|x|) + \ln(C)$$

où $C > 0$. A noter que, la fonction $\ln\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ étant bijective,



toute constante dans $\mathbb{R}$ peut être représentée sous cette forme). $\rfloor$

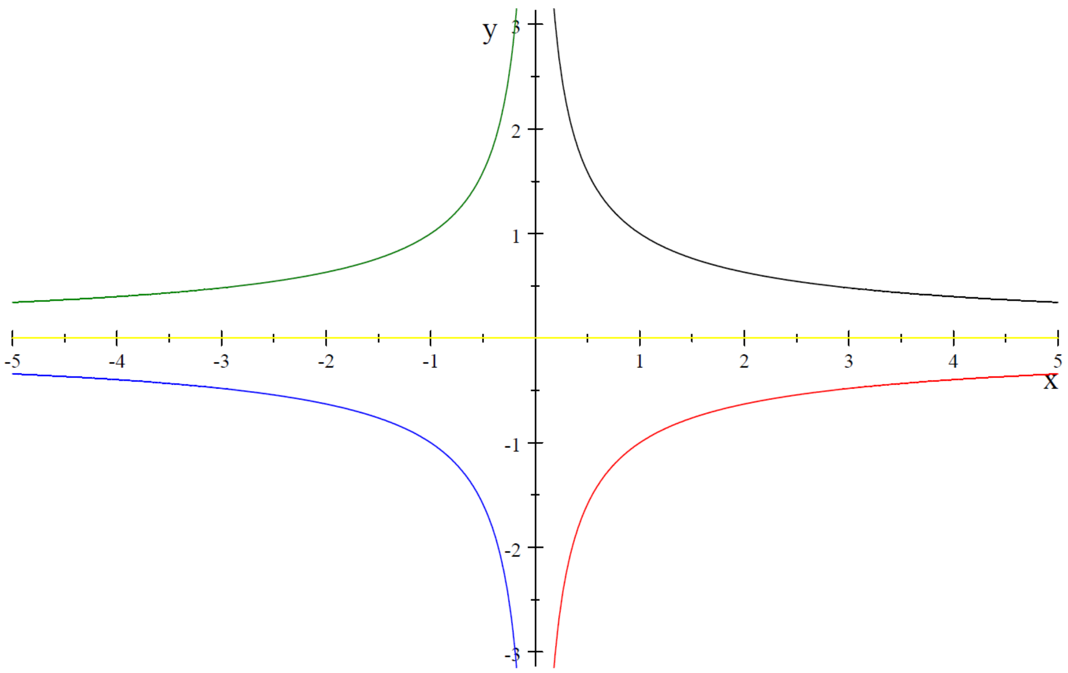
On obtient donc

$$\begin{aligned}
& \ln\left(|y(x)|^3\right) = \ln\left(\frac{C}{|x|^2}\right), && x \neq 0,\ C > 0 \\
\Longrightarrow\ & |y(x)|^3 = \frac{C}{|x|^2}, && x \neq 0,\ C > 0, \\
\Longrightarrow\ & |y(x)| = \frac{C}{|x|^{\frac{2}{3}}}, && x \neq 0,\ C > 0, \\
\Longrightarrow\ & y(x) = \frac{C}{|x|^{\frac{2}{3}}}, && x \neq 0,\ C \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

La solution générale est donc

$$\begin{array}{lccc}
\{ & & y(x) = 0, & x \in \mathbb{R}; \\
& \forall C \in \mathbb{R}^*, & y(x) = \frac{C}{x^{\frac{2}{3}}}, & x \in \mathbb{R}_+^*; \\
& \forall C \in \mathbb{R}^*, & y(x) = \frac{C}{(-x)^{\frac{2}{3}}}, & x \in \mathbb{R}_-^* \quad \}
\end{array}$$

et graphiquement :



avec la solution $y(x) = 0$ (jaune), ainsi que les solutions $\forall C > 0$, $y(x) = \frac{C}{x^{2/3}}$ (ligne noire), ainsi que les solutions $\forall C < 0$, $y(x) = \frac{C}{x^{2/3}}$ (ligne rouge), ainsi que les solutions $\forall C > 0$, $y(x) = \frac{C}{(-x)^{2/3}}$ (ligne verte), ainsi que les solutions $\forall C < 0$, $y(x) = \frac{C}{(-x)^{2/3}}$ (ligne bleue).

ii) Solutions des problèmes de Cauchy

(a) Cas $y(1) = 2$. On a $x > 0$ et $C > 0$. On a $y(1) = \frac{C}{1^{2/3}} = C \overset{!}{=} 2$, et donc $C = 2$. Donc $y(x) = \frac{2}{x^{2/3}}$, $x \in]0, \infty[$ (solution maximale).

(b) Cas $y(1) = -2$. On a $x > 0$ et $C < 0$. On a $y(1) = \frac{C}{1^{2/3}} = C \overset{!}{=} -2$, et donc $C = -2$. Donc $y(x) = \frac{-2}{x^{2/3}}$, $x \in]0, \infty[$ (solution maximale).

(c) Cas $y(-1) = 2$. On a $x < 0$ et $C > 0$. On a $y(-1) = \frac{C}{1^{2/3}} = C \overset{!}{=} 2$, et donc $C = 2$. Donc $y(x) = \frac{2}{(-x)^{2/3}}$, $x \in]-\infty, 0[$ (solution maximale).

(d) Cas $y(-1) = -2$. On a $x < 0$ et $C < 0$. On a $y(-1) = \frac{C}{1^{2/3}} = C \overset{!}{=} -2$, et donc $C = -2$. Donc $y(x) = \frac{-2}{(-x)^{2/3}}$, $x \in]-\infty, 0[$ (solution maximale).

(e) Cas $y(0) = 0$. La solution maximale est $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. (Familles de courbes orthogonales)

i) Il faut d'abord trouver l'équation différentielle de la famille de courbes données qui s'obtient en dérivant l'équation $xy = c$ des deux côtés par rapport à x ("dérivation implicite", cf. Analyse I). Ceci donne $xy' + y = 0$. L'équation différentielle des courbes orthogonales se déduit en remplaçant y' par $-1/y'$ (cf. cours):

$$-\frac{x}{y'} + y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad yy' - x = 0.$$

Par séparation des variables et par intégration, on obtient $y^2 - x^2 = C$ pour $C \in \mathbb{R}$ qui sont des équations d'hyperboles (voir Fig. 1).

ii) Par dérivation implicite de l'équation $y^3 = cx^2$, on obtient $3y^2y' = 2cx$. Pour obtenir l'équation différentielle de la famille donnée, il faut éliminer la constante c en la remplaçant par son expression dans l'équation initiale, c.-à-d. par y^3/x^2 :

$$3xy' = 2y\,.$$

L'équation différentielle de la famille des courbes orthogonales est donc

$$-\frac{3x}{y'} = 2y \qquad \Rightarrow \qquad 2yy' + 3x = 0\,.$$

De nouveau par séparation des variables et par intégration, on obtient

$$y^2 = -\frac{3}{2}x^2 + \tilde{C} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x^2 + 2y^2 = C \quad \text{pour } \tilde{C}, C \in \mathbb{R}\,,$$

qui sont des équations d'ellipses (voir Fig. 2).

iii) Il faut de nouveau d'abord trouver l'équation différentielle de la famille de courbes données qui s'obtient en dérivant l'équation $x^2 + 2y^2 = c$ des deux côtés par rapport à x ("dérivation implicite", cf. Analyse I). Ceci donne $2x + 4yy' = 0$. L'équation différentielle des courbes orthogonales se déduit en remplaçant y' par $-1/y'$ (cf. cours):

$$2x + 4yy' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x + 4y\left(\frac{-1}{y'}\right) = 0.$$

Par séparation des variables et par intégration, on obtient $y = Cx^2$ pour $C \in \mathbb{R}$ qui sont des équations de paraboles (voir Fig. 3). Il manque la courbe $x = 0$ qui n'est pas le graphe d'une fonction de x. Elle peut être obtenue de $y = Cx^2$ après division par C dans la limite $C \to \infty$ (voir plus loin dans le cours).

Exercice 3. (Équations linéaires)

i) L'équation est de la forme $y' + p(x)y = q(x)$ avec $p(x) = 4$ et $q(x) = 3\sin(2x)$.

(a) La solution de l'équation homogène est $y_0(x) = \mathrm{e}^{-4x}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

(b) Selon la méthode des coefficients indéterminés (voir le cours, méthode *c*) avec $r = \lambda = 0$, $\alpha = 2$, $q(x) \in \text{vect}\,\{\sin(2x)\} \Rightarrow y_p(x) \in \text{vect}\,\{\sin(2x),\ \cos(2x)\}$ on pose :

$$y_p(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x).$$

On obtient (substitution dans l'équation)

$$C_1 2\cos(2x) - C_2 2\sin(2x) + 4C_1 \sin(2x) + 4C_2 \cos(2x) = 3\sin(2x) + 0\cos(2x)$$

et en comparant les coefficients on trouve les équations $2C_1 + 4C_2 = 0$ et $4C_1 - 2C_2 = 3$, avec la solution (voir algèbre linéaire) $C_1 = \dfrac{3}{5}$ et $C_2 = -\dfrac{3}{10}$. On a donc $y_p(x) = \dfrac{3}{5}\sin(2x) - \dfrac{3}{10}\cos(2x)$.

(c) La solution générale est : $\forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = y_p(x) + C\mathrm{e}^{-4x}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

ii) L'équation est de la forme $y' + p(x)y = q(x)$ avec $p(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $q(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(a) La solution de l'équation homogène est $y_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) On pose $y_p(x) = C(x)y_0(x)$ et l'on obtient l'équation $C'(x) = 4x$ et donc $C(x) = 2x^2$ et $y_p(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(c) La solution générale est $\forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = \dfrac{2x^2 + C}{\sqrt{1+x^2}}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. (Équations de Bernoulli)

i) Tout d'abord on a la solution triviale $y(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour trouver des solutions non-triviales on procède comme au cours (§ 1.6.2). On pose $u = y^{1-4} = y^{-3}$, $u' = -3y^{-4}y'$ et on multiplie l'équation donnée par $-\frac{3}{y^4}$:

$$y' - y = x\,y^4 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{3}{y^4}y' + \frac{3}{y^3} = -3x \qquad \Rightarrow \qquad u' + 3u = -3x\ .$$

Comme l'équation différentielle en u ainsi obtenue est linéaire, on peut la résoudre en trouvant une solution de l'équation homogène associée et une solution particulière de l'équation complète par la méthode des coefficients indéterminés. On trouve

$$u_{\text{hom}}(x) = Ce^{-3x}, \quad C \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad u_{\text{part}}(x) = Ax + B \quad \text{avec}\ \ A = -1,\ B = \frac{1}{3}$$

si bien que la solution générale est

$$u(x) = u_{\text{hom}}(x) + u_{\text{part}}(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{3} - x, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid u(x) = 0\} \ .$$

Le domaine de $u(x)$ n'est pas $\mathbb{R}$ parce que $u = \frac{1}{y^3}$ ne peut être zéro.

Les solutions y de l'équation initiale satisfont donc $y^3 = \frac{1}{u}$, c'est-à-dire

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)}} \qquad \text{sur les intervalles ouverts sur lesquels } u(x) > 0\,,$$

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-u(x)}} \qquad \text{sur les intervalles ouverts sur lesquels } u(x) < 0\,.$$

Pour illustrer les domaines de définition de $y(x)$, on considère les trois valeurs de C pour lesquelles la fonction $u(x)$ est représentée à la Fig. 1.

En notant les solutions avec $C = c$ par y_c et u_c, on a

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u_2(x)}}\ , \qquad x \in\,]-\infty, b[$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-u_2(x)}}\ , \qquad x \in\,]b, \infty[$$

$$y_{-0.2}(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-u_{-0.2}(x)}}\ , \qquad x \in\,]-\infty, a_1[$$

$$y_{-0.2}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u_{-0.2}(x)}}\ , \qquad x \in\,]a_1, a_2[$$

$$y_{-0.2}(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-u_{-0.2}(x)}}\ , \qquad x \in\,]a_2, \infty[$$

$$y_1(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-u_1(x)}}\ , \qquad x \in\,]-\infty, \infty[$$

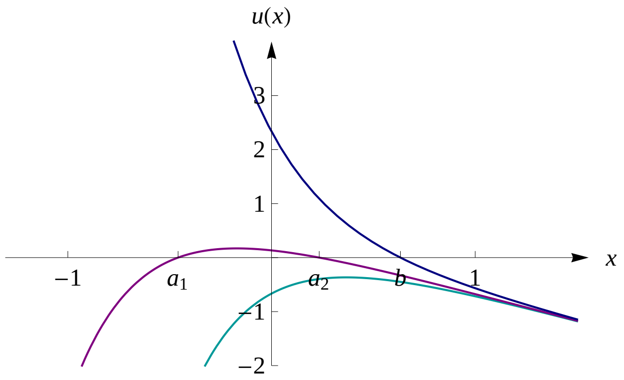


Figure 4: : Fonctions $u(x)$ de l'Ex. $2i$ pour $C = 2$, $C = -0.2$ et $C = -1$ (du haut en bas).

ii) Comme pour toute équation différentielle de Bernoulli on a la solution triviale $y(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour trouver les solutions non triviales, on fait la substitution $u = y^{1-3} = y^{-2}$, $u' = -2y^{-3}y'$ et on multiplie l'équation donnée par $-\frac{2}{y^3}$ pour obtenir une équation différentielle linéaire en u :

$$y' + 4y = 2(x+1)y^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{2y'}{y^3} - \frac{8}{y^2} = -4(x+1) \qquad \Leftrightarrow \qquad u' - 8u = -4(x+1)\,.$$

On trouve sa solution générale comme au point $i)$:

$$u_{\text{hom}}(x) = Ce^{8x}, \quad C \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad u_{\text{part}}(x) = Ax + B \quad \text{avec } A = \frac{1}{2},\ B = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow\ u(x) = u_{\text{hom}}(x) + u_{\text{part}}(x) = Ce^{8x} + \frac{8x+9}{16}, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\}\ ,$$

où la restriction du domaine est analogue au point $i)$ sauf qu'il faut avoir $u > 0$ ici (cf. définition de u).

Les solutions y de l'équation initiale satisfont donc $\frac{1}{y^2} = u$, c'est-à-dire

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{Ce^{8x} + \frac{8x+9}{16}}}, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \,]a, b[\,,$$

où $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sont tels que $u(x) > 0$ pour tout $x \in \,]a, b[\,$.

iii) De nouveau faut effectuer le changement de variable $u = 1/y^2$, $u' = -\frac{2}{y^3}y'$ afin d'obtenir une équation linéaire :

$$y' + \frac{y}{x} = x^2y^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{2}{y^3}y' + -\frac{2}{y^3}\frac{y}{x} = -\frac{2}{y^3}x^2y^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad u' - \frac{2u}{x} = -2x^2\,.$$

On a

$$u_{\text{hom}}(x) = C\exp(-\int -\frac{2}{x}\,dx) = C\exp(2\ln|x|) = Cx^2, \qquad C \in \mathbb{R}$$

et on pose (variation de la constante) $u_{\text{part}}(x) = C(x)x^2$ comme solution particulière. Ainsi

$$C'(x)x^2 = -2x^2 \qquad \Leftarrow \qquad C'(x) = -2$$

dont une solution est $C(x) = -2x$. On obtient donc comme solution particulière

$$u_{\text{part}}(x) = -2x^3$$

et donc

$$u(x) = Cx^2 - 2x^3, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \begin{cases}]-\infty, 0[& C > 0 \\ ]0, \frac{C}{2}[& C > 0 \\ ]-\infty, \frac{C}{2}[& C \leq 0 \end{cases}$$

En fait on ne peut pas définir u pour tout $x \in \mathbb{R}$ parce que $u = 1/y^2 > 0$. Ainsi il faut trouver les intervalles où $u(x) > 0$. Sur ces intervalles-là on peut alors écrire $y = 1/\sqrt{u}$, c.-à-d.

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{Cx^2 - 2x^3}}\ , \qquad C \in \mathbb{R}, \qquad x \in \begin{cases}]-\infty, 0[& C > 0 \\ ]0, \frac{C}{2}[& C > 0 \\ ]-\infty, \frac{C}{2}[& C \leq 0 \end{cases}$$

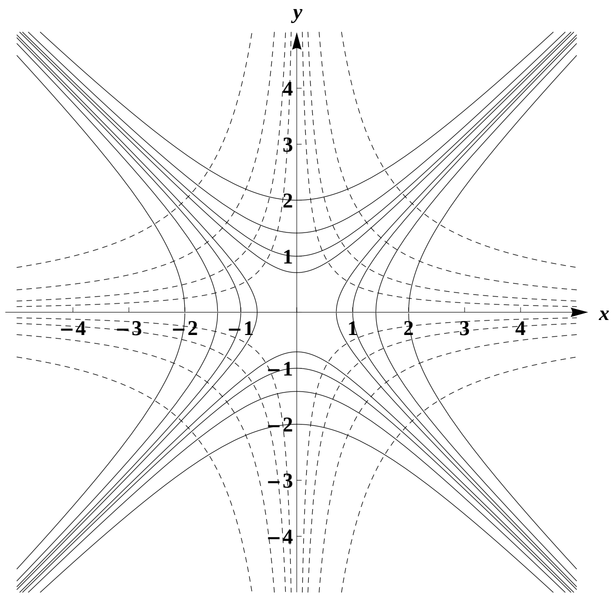


Figure 1: Des courbes $xy = c$ (en pointillé) et leurs courbes orthogonales.

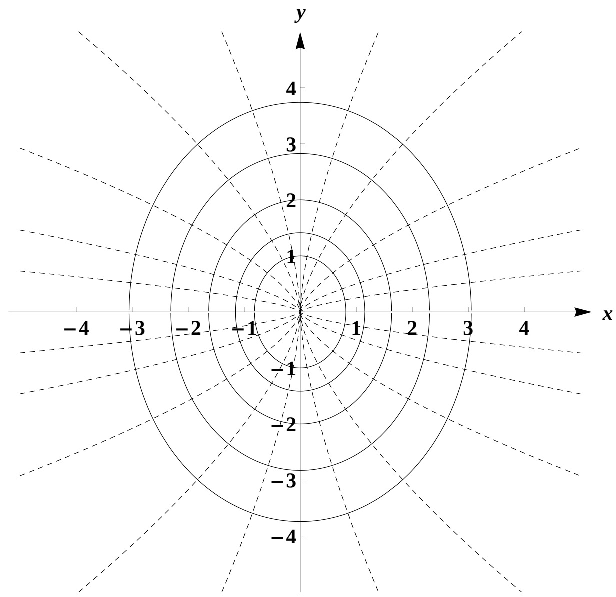


Figure 2: Des courbes $y^3 = cx^2$ (en pointillé) et leurs courbes orthogonales.

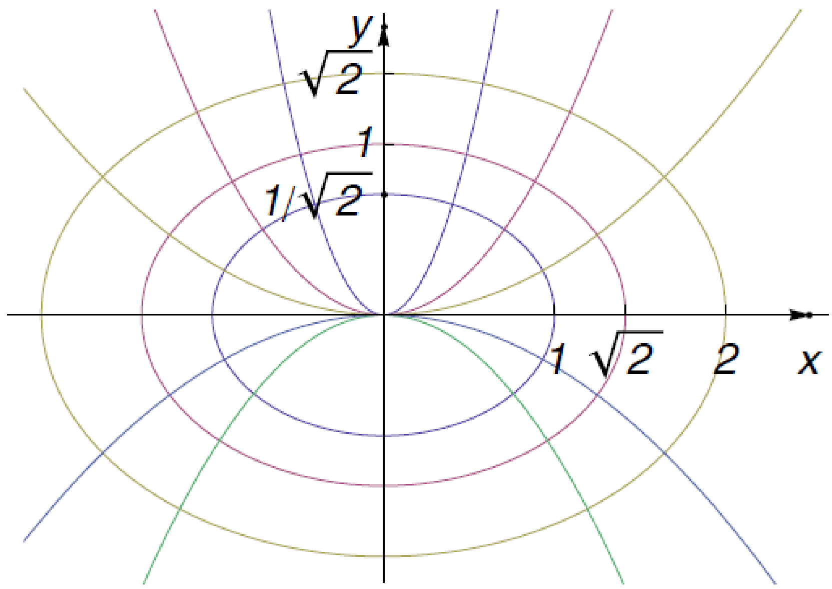


Figure 3: Des courbes $x^2 + 2y^2 = c$ et leurs courbes orthogonales.