1.5 ED linéaires du deuxième ordre à coëfficients constants

1.5.1. Définitions

Une ED linéaire du deuxième ordre à coëfficients constants est de la forme

$$\boxed{a\,y'' + b\,y' + c\,y = q(x) \qquad (*)}$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et q une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Cette équation est de la forme

$$\boxed{Ly = q}$$

avec $L : C^2(I) \longrightarrow C^0(I)$ définie par

$$(L\eta)(x) \equiv (L(\eta))(x) := a \cdot \eta''(x) + b\,\eta'(x) + c\,\eta(x)$$

et L est une application linéaire.

Remarque: donc de nouveau, par linéarité, si

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \, q_i(x) \quad , \; a_i \in \mathbb{R}, \text{ c.-à-d., si}$$

$$q \in \text{vect}\{q_1, \dots, q_m\} \text{ et si}$$

$$Ly_i = q_i \, , \; i = 1, \dots, m, \text{ alors } y(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \, y_i(x)$$

satisfait $Ly = q$.

Remarque: voir aussi la série 4B, échauffement.

1.5.2. Méthode de résolution

La procédure est analogue au cas des équations linéaires du premier ordre:

i) Méthode de résolution de l'équation homogène $Ly=0$

La solution est de la forme

$$\boxed{\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}\}}$$

Pour trouver y_1 et y_2 on essaye $y(x) = e^{\lambda x}$ (ça marche car l'équation est à coefficients constants) que l'on substitue dans $Ly = ay'' + by' + cy = 0$ et on trouve

$$\boxed{e^{\lambda x} \underbrace{(a \cdot \lambda^2 + b\lambda + c)}_{\overset{!}{=} 0} \overset{!}{=} 0 \quad \text{équation charactéristique}}$$

<u>1^{er} cas:</u> $b^2 - 4ac > 0$. Deux solutions réelles pour λ, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. La solution générale de l'équation homogène est

$$\boxed{\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y_h(x) = C_1 \cdot \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{=y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{\lambda_2 x}}_{=y_2(x)}\ ,\ x \in \mathbb{R}\}}$$

<u>$2^{ème}$ cas:</u> $b^2 - 4ac = 0$. Seulement une solution réelle $\lambda \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation homogène est (voir série 4B, Ex. 2 i) pour $y_2(x)$)

$$\boxed{\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y_h(x) = C_1 \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{=y_1(x)} + C_2 \cdot \underbrace{x e^{\lambda x}}_{=y_2(x)}\ ,\ x \in \mathbb{R}\}.}$$

<u>$3^{ème}$ cas:</u> $b^2 - 4ac < 0$. Deux solutions complexes conjugés pour λ, $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. La solution (réelle) générale de l'équation homogène est (voir série 4B, Ex 2 ii))

$$\boxed{\left\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y_h(x) = C_1 \underbrace{e^{\alpha x}\cos(\beta x)}_{=y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{\alpha x}\sin(\beta x)}_{=y_2(x)},\ x \in \mathbb{R}\right\}}$$

ii) Recherche d'une solution particulière de l'équation inhomogène $Ly = q$.

a) Méthode de la variation des constantes

Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ les deux solutions construites sous i). Alors on pose

$$y(x) = \boxed{C_1(x)\cdot y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)}_{(0)} \quad \Rightarrow$$

$$y'(x) = \underbrace{C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x)}_{(1)}$$

on impose $\overset{!}{=}\ 0 + \boxed{C_1(x)\cdot y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x)}_{(1)}$

$$y''(x) = \underbrace{C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x)}_{(2)}$$

$$+ \boxed{C_1(x)\, y_1''(x) + C_2(x)\, y_2''(x)}_{(2)}$$

On obtient

$$a \boxed{}_{(2)} + b\cdot \boxed{}_{(1)} + c\cdot \boxed{}_{(0)}$$

$$+\ a \left(\right)_{(2)} = q(x).$$

TEST !

$$\Leftrightarrow \boxed{C_1(x)\underbrace{(a y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{=0} + C_2(x)\underbrace{(a y_2'' + b y_2' + c y_2)}_{=0}}_{(2),(1),(0)}$$

car $Ly_1 = 0$ $\quad + a\left(\right)_{(2)} = q(x)$ $\quad$ car $Ly_2 = 0$

Donc on obtient:

$$\boxed{\begin{aligned} &(1) \quad C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ &(2) \quad C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = \frac{1}{a} g(x) \end{aligned}}$$

← le choix imposé

ou encore (écriture matricielle)

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} g(x) \end{pmatrix}}$$

apprendre par cœur

et on obtient (voir la remarque en bas)

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} g(x) \end{pmatrix}$$

← continue sur I

puis on intègre les fonctions $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$ pour obtenir $C_1(x)$ et $C_2(x)$ et donc une solution particulière.

$$\boxed{y_p(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) \quad , \quad x \in I}$$

iii) Solution générale du problème

Par la linéarité du problème la solution générale de l'équation $(*)$ est

$$\boxed{\left\{ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \, , \; y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad \text{avec } x \in I \right\}}$$

Remarque: la fonction

$$w(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$
$$= y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)$$

est appelée le Wronskien des solutions y_1 et y_2. Il est non nul (pour tout x) puisque les solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne sont pas des multiples l'une de l'autre, c'est-à-dire puisque $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes

Démonstration: voir la série 4B, Ex. 3

De retour à ii)

b) Méthode des coefficients indéterminés

Soit $q \in \text{vect}\{q_i \;,\; i = 1 \ldots m\}$

Cas résonants: (soit $r \in \mathbb{N}$)

1er cas: $y_h(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2\, e^{\lambda_2 x}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Si $q_i(x) = x^r e^{\lambda x}$, $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$

Alors $y_{P_i}(x) \in \text{vect}\{x^{r+1} e^{\lambda x}, x^r e^{\lambda x}, \ldots, x^1 e^{\lambda x}\}$.

2ème cas: $y_h(x) = C_1\, e^{\lambda x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}$.

Si $q_i(x) = x^r e^{\lambda x}$

Alors $y_{P,i}(x) \in \text{vect}\{x^{r+2} e^{\lambda x}, \ldots, x^2 e^{\lambda x}\}$.

$\underline{3^{\text{ème}}\text{ cas}}$: $y_h(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Si $q_i(x) = x^r e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $x^r e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Alors $y_{p,i}(x) \in \text{vect}\{x^{r+1} e^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^1 e^{\alpha x}\cos(\beta x),$

$x^{r+1} e^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^1 e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}$

Cas non-résonant: (tous les autres cas, voir le tableau)

$$y_{p,i} \in \text{vect}\{q_i, q_i', \dots \}$$

Soit $r \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ (cas non-résonants):

fonction $q_i(x)$	$\longrightarrow$ fonction $y_{p,i}(x) \in$
x^r	$\text{vect}\{x^r, x^{r-1}, \dots, x, 1\}$
$x^r e^{\lambda x}$	$\text{vect}\{x^r e^{\lambda x}, \dots, x e^{\lambda x}, e^{\lambda x}\}$
$x^r \sin(\beta x) e^{\alpha x}$	$\text{vect}\{x^r \sin(\beta x) e^{\alpha x}, \dots, \sin(\beta x) e^{\alpha x},$ $x^r \cos(\beta x) e^{\alpha x}, \dots, \cos(\beta x) e^{\alpha x}\}$
$x^r \cos(\beta x) e^{\alpha x}$	—— dito ——

1.5.3. Exemples

Voir les séries 2A, 3A

1.6. ED linéaires du deuxième ordre (à coefficients variables)

1.6.1. Equations homogènes

C'est une équation de la forme

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \qquad (*)$$

avec p et q des fonctions continues sur un intervalle I.

Il n'existe aucune méthode de résolution générale ! *)

Réduction de l'ordre: si on connaît une solution non nulle $y_1(x)$ de $(*)$ sur I on pose:

$$y(x) = U(x) \cdot y_1(x) \qquad (**)$$

où $U(x)$ est une primitive d'une nouvelle fonction inconnue $u(x)$.

En substituant $(**)$ dans l'équation $(*)$ on trouve: (voir série 4B, Ex. 1)

$$y_1(x)\,u'(x) + \left(2y_1'(x) + p(x)\,y_1(x)\right) u(x) = 0 \quad \text{sur } I$$

ce qui est une ED linéaire homogène du premier ordre que l'on sait résoudre (par séparation des variables) pour trouver $u(x)$ $(\neq 0)$, puis on détermine une primitive $U(x)$ de $u(x)$ pour obtenir une deuxième solution $y_2(x) = U(x) \cdot y_1(x)$ linéairement indépendante de $y_1(x)$.

*) Ceci veut dire qu'en général on ne sait pas exprimer les solutions en termes de primitives. Le théorème d'existence (et d'unicité) nous permettra cependant d'exprimer les solutions comme limites de suites de fonctions.

1.6.2. Equations inhomogènes

C'est une équation de la forme

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \qquad (*)$$

avec p, q et f continues sur un intervalle I.

i) soient y_1 et y_2 (les) deux solutions linéairement indépendantes du problème homogène associé à $(*)$.

ii) la méthode de la variation des constantes marche exactement comme pour le cas des coefficients constants (voir 1.5.2.). On pose

$$y_p(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x)$$

avec $C_1(x)$ et $C_2(x)$ solution de

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Voir le paragraphe 1.5.2. pour les détails

iii) la solution générale est de la forme

$$\left\{ \forall C_1, C_2 ,\quad y(x) = y_p(x) + \underbrace{C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)}_{\equiv y_h(x)} ,\ x \in I \right\}$$

1.7. Autres équations du deuxième ordre

1.7.1. Équations indépendantes de y (série 5B, Ex 2)

Soit l'équation

$$E(x, y', y'') = 0 \qquad (*)$$

On pose $u = y'$ et on obtient l'équation du premier ordre

$$E(x, u, u') = 0 \qquad (**)$$

et toute primitive d'une solution de $(**)$ est une solution de $(*)$

1.7.2. Equations indépendantes de x (série 5B, Ex 3)

Soit l'équation

$$E(y, y', y'') = 0. \qquad (*)$$

On pose

$$y'(x) = u(y(x))$$

avec u une nouvelle fonction inconnue.
On a

$$\begin{aligned} y''(x) &= u'(y(x))\, y'(x) \\ &= u'(y(x))\, u(y(x)) \end{aligned}$$

En substituant dans $(*)$ on obtient

$$E(y, u(y), u'(y)\, u(y)) = 0 ,$$

ou encore, en considérand y comme variable idépendante

$$E(y, u, u'u) = 0 \qquad (**)$$

Donné une solution $u(y)$ de $(**)$, on revient à (mais la fonction u est maintenant connue)

$$y' = u(y)$$

que l'on peut résoudre par séparation des variables.

1.7.3. Equations indépendantes de x et y (série 5B Ex 4)

Soit l'équation

$$y'' = f(y') \qquad (*)$$

On peut traiter $(*)$ avec les méthodes vues dans les paragraphes 1.7.1 et 1.7.2. ou par la méthode suivante. Soit

$$y' = u \qquad (**_1)$$

alors on a de $(*)$

$$u' = f(u) \qquad (**_2).$$

séparation des variables:

$(**_2)$ donne $\quad dx = \dfrac{du}{f(u)}$.

$(**_1)$ donne $\quad dy = u\,dx = \dfrac{u\,du}{f(u)}$

La solution générale est donnée sous forme paramétrique par.

$$\left\{ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad x = \int \frac{du}{f(u)} + C_1 \quad y = \int \frac{u\,du}{f(u)} + C_2. \quad \text{avec } u \in I \text{ (à trouver)} \right\}.$$

1.7.4. Equations indépendantes de x et y'

Soit l'équation (de Newton)

$$y'' = f(y) \qquad (*)$$

avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On peut traiter $(*)$ par la méthode du paragraphe 1.7.2, ou encore en multiplient $(*)$ avec y' ce qui donne l'équation

$$y'' \cdot y' - f(y)\,y' = 0 \qquad (**)$$

Soit U l'opposé d'une primitive de f, i.e. $U' = -f$, alors toute solution de $(**)$ est solution de l'équation

$$\frac{1}{2} y'^2 + U(y) = E \qquad (***).$$

pour une constante $E \in \mathbb{R}$ (appelée énergie mécanique)
L'équation $(***)$ donne lieu aux deux équations $y' = \pm\sqrt{2E - 2U(y)}$ que l'on peut résoudre par séparations des variables