Peter Wittwer
8 mars 2024

Analyse avancée II – Série 3B

Échauffement. (Invariance d'échelle)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit l'équation différentielle homogène $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Montrer que si $y_1(x)$ est une solution de l'équation, alors pour tout $C \in \mathbb{R}^*$ la fonction $y_C(x) = \frac{1}{C}\, y_1(Cx)$ est aussi une solution de l'équation.

Exercice 1. (Équations homogènes)

Soit l'équation différentielle homogène $(x^2 - y^2)\, y' = 2xy$.

i) Trouver la solution générale de l'équation.

ii) Représenter les solutions graphiquement.

Exercice 2. (Équations homogènes)

Résoudre les équations différentielles suivantes:

i) $x\, y' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

ii) $x^2\, y' = y(y + 2x)$

iii) $y' = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$ pour les paramètres suivants:

	a	b	c	d
1)	2	1	−3	2
2)	−1	3	5	1
3)	1	1	3	−2

iv) Ramener l'équation ci-dessous à une équation de la forme *iii*) sans la résoudre après.

$$y' = \frac{ax + by + r}{cx + dy + s}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad r \neq 0 \text{ ou } s \neq 0$$

Indication: Il faut introduire des nouvelles coordonnées $\bar{x}, \bar{y}$.

Exercice 3. (Équation de Riccati)

Soit l'équation différentielle de Riccati $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$.

i) Soit y_1 une solution quelconque de cette équation sur un intervalle ouvert I, et posons $y = y_1 + \frac{1}{u}$. Montrer que si u satisfait l'équation différentielle linéaire

$$u' + (2a(x)y_1(x) + b(x))\, u = -a(x)$$

sur un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $\forall x \in J$, $u(x) \neq 0$, alors $y = y_1 + \frac{1}{u}$ est solution de l'équation différentielle de Riccati sur J.

ii) Utiliser l'indication *i*) pour résoudre l'équation différentielle de Riccati

$$3\, x\, y' + 4\, y^2 - 4 = 0 \ .$$

Exercice 4. (Équation de Clairaut)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$(y - xy')^2 = -2y' \, .$$