Analyse avancée II – Corrigé de la série 3A

Echauffement.

On pose le changement de variable $x = \varphi(u) = u^2$, $\varphi'(u) = 2u$. Comme $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(2) = 4$, les bornes de u sont $\alpha = 0$ et $\beta = 2$. Ainsi

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\, dx = \int_0^2 \frac{2u^2}{\sqrt{1+u}}\, du$$

Pour calculer l'intégrale en u, il faut encore un changement de variable. On pose $u = \psi(t) = t^2 - 1$, $\psi'(t) = 2t$. Comme $\psi(1) = 0 = \alpha$ et $\psi(\sqrt{3}) = 2 = \beta$, les bornes de t sont 1 et $\sqrt{3}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2u^2}{\sqrt{1+u}}\, du &= \int_1^{\sqrt{3}} 4(t^2-1)^2\, dt = 4\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 4\left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1\right) = \frac{16\sqrt{3}}{5} - \frac{32}{15}\ .\end{aligned}$$

Exercice 1.

i) On résout d'abord le système donné en inversant la matrice :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} {C_1}'(x) \\ {C_2}'(x)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x)\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x)\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}\begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\tan(x) \\ \cos(x)\tan(x)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-\sin(x)^2}{\cos(x)} \\ \sin(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc on obtient facilement qui $C_2(x) = \displaystyle\int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$ (rappelez-vous qu'on n'a pas besoin des constantes d'intégration pour une solution particulière).

Pour trouver $C_1(x)$ observons que

$${C_1}'(x) = \frac{-\sin(x)^2}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)^2 - 1}{\cos(x)} = \cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}$$

et donc

$$C_1(x) = \sin(x) - \int \frac{1}{\cos(x)}\, dx\ .$$

Pour calculer cette dernière primitive, on pose le changement de variable $x = \varphi(t) = \arcsin(t)$, donc $\varphi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Par la formule du changement de variable (cf. Analyse I) on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx &= \int \frac{1}{\cos(\varphi(t))}\,\varphi'(t)\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\varphi(t))^2}}\,\varphi'(t)\,dt \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int \frac{1}{(1+t)(1-t)}\,dt \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt = \frac{1}{2}\Big(\ln\big(|1+t|\big) - \ln\big(|1-t|\big)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{\big(1+\sin(x)\big)^2}{1-\sin(x)^2}\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|^2\right) = \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $C_1(x) = \sin(x) - \ln\left(\left|\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)$ et donc

$$\begin{aligned}
y_{\text{part}}(x) &= C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x) \\
&= \left[\sin(x) - \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)\right]\cos(x) - \cos(x)\sin(x) \\
&= -\cos(x)\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)
\end{aligned}$$

ii) Les points problématiques sont ceux où $\cos(x) = 0$ ou $1+\sin(x) = 0$. La fonction f est donc bien définie sur tous les autres points, c.-à-d. sur $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}\}$.

Pour $x_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, on a $\cos(x_{2n}) = 0$ et $1 + \sin(x_{2n}) = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_{2n}} f(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(-\cos(x)\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)\right) \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \Big(-\cos(x)\ln\big(|1+\sin(x)|\big)\Big) + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(x)\ln\big(|\cos(x)|\big)\Big) \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \big(-\cos(x)\big)\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\big(|1+\sin(x)|\big) + \lim_{y\to 0}\big(y\ln\big(|y|\big)\big) \\
&= 0\cdot\ln(2) + 0 = 0\,,
\end{aligned}$$

où la dernière limite en y est calculée par Bernoulli-l'Hospital. En effet, les hypothèses sont satisfaites si on écrit $y\ln(|y|) = \dfrac{\ln(|y|)}{1/y}$ (le vérifier). A priori, on devrait séparer les cas $y > 0$ et $y < 0$ mais comme $\dfrac{d}{dy}\ln(|y|) = \dfrac{1}{y}$ pour $y > 0$ *et* pour $y < 0$, il suffit de calculer une seule limite :

$$\lim_{y\to 0}\big(y\ln\big(|y|\big)\big) = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(|y|)}{\frac{1}{y}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0}(-y) = 0\,.$$

Si on définit f en ces points par $f(x_{2n}) = 0$, elle est continue en ces points (on a en effet fait un prolongement par continuité).

Similairement, pour $x_{2n+1} = \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, on a $\cos(x_{2n+1}) = 0$ et $1 + \sin(x_{2n+1}) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_{2n+1}} f(x) &= \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \left(-\cos(x)\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(-\sin(x)\ln\left(\left|\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right|\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(-\sin(x)\ln\left(\left|\frac{(1-\cos(x))\,(1+\cos(x))}{\sin(x)\,(1+\cos(x))}\right|\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(-\sin(x)\ln\left(\left|\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right|\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \Big(-\sin(x)\ln\big(|\sin(x)|\big)\Big) + \lim_{x\to 0} \Big(\sin(x)\ln\big(|1+\cos(x)|\big)\Big) \\
&= \lim_{y\to 0} \big(-y\ln\big(|y|\big)\big) + \lim_{x\to 0} \big(\sin(x)\big) \cdot \lim_{x\to 0} \ln\big(|1+\cos(x)|\big) \\
&= 0 + 0\cdot\ln(2) = 0\,,
\end{aligned}$$

Si on définit f en ces points par $f(x_{2n+1}) = 0$ (prolongement par continuité), elle est aussi continue en ces points et donc sur tout $\mathbb{R}$.

iii) Les points qui pourraient poser problème pour la dérivabilité sont les points où f n'était pas continue à la base, c'est-à-dire $\big\{x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\big\}$.

Etudions d'abord la dérivabilité de f en les points de la forme x_{2n}. Pour ces points on a

$$-\cos(x) = \sin\big(x - \tfrac{\pi}{2}\big) = \sin\big(x - \tfrac{\pi}{2} - 2n\pi\big) = \sin(x - x_{2n})\,,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_{2n}} \frac{f(x) - f(x_{2n})}{x - x_{2n}} &= \lim_{x\to x_{2n}} \frac{-\cos(x)}{x - x_{2n}} \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) \\
&= \lim_{x\to x_{2n}} \frac{\sin(x - x_{2n})}{x - x_{2n}} \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) \\
&= \lim_{x\to x_{2n}} \frac{\sin(x - x_{2n})}{x - x_{2n}} \cdot \lim_{x\to x_{2n}} \Big(\ln\big(|1+\sin(x)|\big) - \ln\big(|\cos(x)|\big)\Big) \\
&= 1\cdot(\ln(2) + \infty) = \infty
\end{aligned}$$

parce que $\lim_{x\to x_{2n}} -\ln\big(|\cos(x)|\big) = \infty$. Ainsi f n'est pas dérivable en x_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour les points de la forme x_{2n+1} on a

$$-\cos(x) = -\sin\big(x + \tfrac{\pi}{2}\big) = -\sin\big(x - \big(-\tfrac{\pi}{2} - 2n\pi\big)\big) = -\sin(x - x_{2n+1})\,,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_{2n+1}} \frac{f(x) - f(x_{2n+1})}{x - x_{2n+1}} &= \lim_{x\to x_{2n+1}} \frac{-\cos(x)}{x - x_{2n+1}} \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) \\
&= \lim_{x\to x_{2n+1}} -\frac{\sin(x - x_{2n+1})}{x - x_{2n+1}} \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) \\
&= (-1)\cdot(-\infty) = \infty
\end{aligned}$$

parce que $\lim_{x \to x_{2n+1}} \ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right) = -\infty$. Ainsi f n'est pas dérivable en x_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction f n'est donc pas dérivable en $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Ceci est une conséquence du fait que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \tan(x)$. En effet, si f était (deux fois) dérivable en ces points, on aurait une contradiction parce que le membre de droite $\tan(x)$ n'est pas défini en ces points.

iv) Le produit de deux fonctions périodiques est périodique si le rapport des périodes est rationnel et la composition d'une fonction quelconque avec une fonction périodique est périodique. Ainsi la fonction f est périodique en tant que produit des fonctions $-\cos(x)$ et $\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)$ qui sont les deux 2π-périodiques.

v) On a

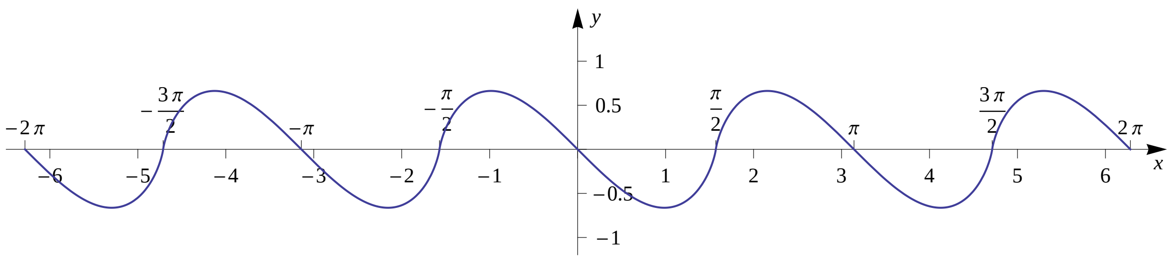
$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= -\cos(x+\pi)\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}\right|\right) \\ &= \cos(x)\ln\left(\left|\frac{1-\sin(x)}{-\cos(x)}\right|\right) = f(x)\ , \end{aligned}$$

car

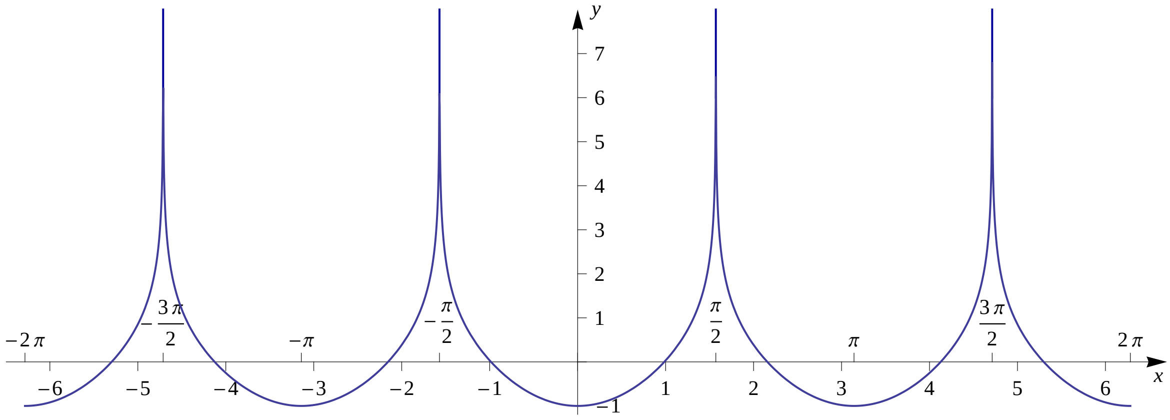
$$\begin{aligned} \ln\left(\left|\frac{1-\sin(x)}{-\cos(x)}\right|\right) &= \ln\left(\left|\frac{\big(1-\sin(x)\big)\big(1+\sin(x)\big)}{-\cos(x)\big(1+\sin(x)\big)}\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|\frac{1-\sin(x)^2}{-\cos(x)\big(1+\sin(x)\big)}\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{\cos(x)^2}{-\cos(x)\big(1+\sin(x)\big)}\right|\right) \\ &= \ln\left(\left|\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right|\right) = -\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right), \end{aligned}$$

et donc f est bien π-périodique.

Voici encore les graphes de f



et de f' :



Exercice 2.

i) Pour résoudre cette équation linéaire du 4^e ordre à coefficients constants, on utilise la généralisation de la méthode vue pour les équations du 2^e ordre.

L'équation caractéristique de l'équation différentielle donnée est $\lambda^4 - \lambda^2 - 12 = 0$ et admet les racines

$$\lambda_{1,2} = \pm 2, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}i\,.$$

Comme toutes ces racines sont des racines simples, la solution générale de l'équation homogène associée est

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{3}x\right) + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}\,.$$

Par la méthode des coefficients indéterminés, une solution particulière de l'équation complète est de la forme $y_{\text{part}} = Ax + B$, ce qui mène à l'équation $-12(Ax+B) = 12x + 5$, d'où on obtient $A = -1$ et $B = -\dfrac{5}{12}$. La solution générale est ainsi

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{3}x\right) + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} - x - \tfrac{5}{12}\,,$$
$$x, C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

ii) L'équation caractéristique est $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$ et ses racines sont

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{avec } p_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = -1 \quad \text{avec } p_2 = 1\,.$$

La solution générale de l'équation homogène associée est alors

$$y_{\text{hom}}(x) = P_1(x)e^{3x} + C_2 e^{-x}\,,$$

où $P_1(x) = C_0 + C_1 x$ est un polynôme de degré $p_1 - 1 = 1$ et les constantes $C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Pour appliquer la méthode des coefficients indéterminés, on regarde si les membres de droite et leurs dérivées satisfont l'équation homogène. Clairement e^{-x} est une solution et $\sin(x)$ n'en est pas (regarder la solution générale y_{hom}). La fonction xe^{-x} ne satisfait par contre pas l'équation homogène. Ainsi une solution particulière y_{part} est de la forme

$$y_{\text{part}} = Axe^{-x} + B\sin(x) + C\cos(x)\,.$$

et ses dérivées sont

$$\begin{aligned} {y_{\text{part}}}' &= Ae^{-x} - Axe^{-x} + B\cos(x) - C\sin(x) \\ {y_{\text{part}}}'' &= -2Ae^{-x} + Axe^{-x} - B\sin(x) - C\cos(x) \\ {y_{\text{part}}}''' &= 3Ae^{-x} - Axe^{-x} - B\cos(x) + C\sin(x) \end{aligned}$$

Si on met y_{part} dans l'équation différentielle donnée on obtient

$$16Ae^{-x} + 2B\cos(x) + 14C\cos(x) + 14B\sin(x) - 2C\sin(x) = e^{-x} + \sin(x)\,,$$

d'où

$$16A = 1\,, \qquad 2B + 14C = 0 \qquad \text{et} \qquad 14B - 2C = 1\,.$$

Les solutions sont $A = \frac{1}{16}$, $B = \frac{7}{100}$ et $C = -\frac{1}{100}$. Ainsi

$$y_{\text{part}} = \frac{1}{16}xe^{-x} + \frac{7}{100}\sin(x) - \frac{1}{100}\cos(x)$$

et la solution générale de l'équation donnée est

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_0e^{3x} + C_1xe^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{16}xe^{-x} + \frac{7}{100}\sin(x) - \frac{1}{100}\cos(x)\,,$$

où $x, C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

i) L'isocline associée à la pente c de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ est donnée par $f(x,y) = c$.

Comme $y = 0$ n'est pas solution de l'équation $y^2\,y' + x^2 = 0$, on a $f(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}$ avec $y \neq 0$. Les isoclines associée à la pente c sont donc données par l'équation

$$c + \frac{x^2}{y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad cy^2 + x^2 = 0\,.$$

Pour $c = 0$, cette équation décrit la droite $x = 0$. Quand $c \neq 0$, on a $y^2 = -\dfrac{x^2}{c}$ ce qui implique que $c < 0$. Les isoclines dans ce cas sont

$$y = \pm\frac{x}{\sqrt{-c}} \quad \text{avec} \quad c < 0,$$

donc aussi des droites (deux pour chaque pente c).

Les isoclines pour $y' \in \left\{0, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -8\right\}$ et les trajectoires intégrales pour les conditions initiales données sont représentées à la Fig. 1.

ii) L'équation différentielle $y^2y' + x^2 = 0$ est une équation différentielle à variables séparées

$$y^2\,dy = -x^2\,dx\,,$$

dont la solution générale est obtenue par intégration (ne pas confondre la pente c et la constante d'intégration C!):

$$\frac{1}{3}y^3 = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{C}{3}, \quad C \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x)^3 = C - x^3, \quad C \in \mathbb{R}$$

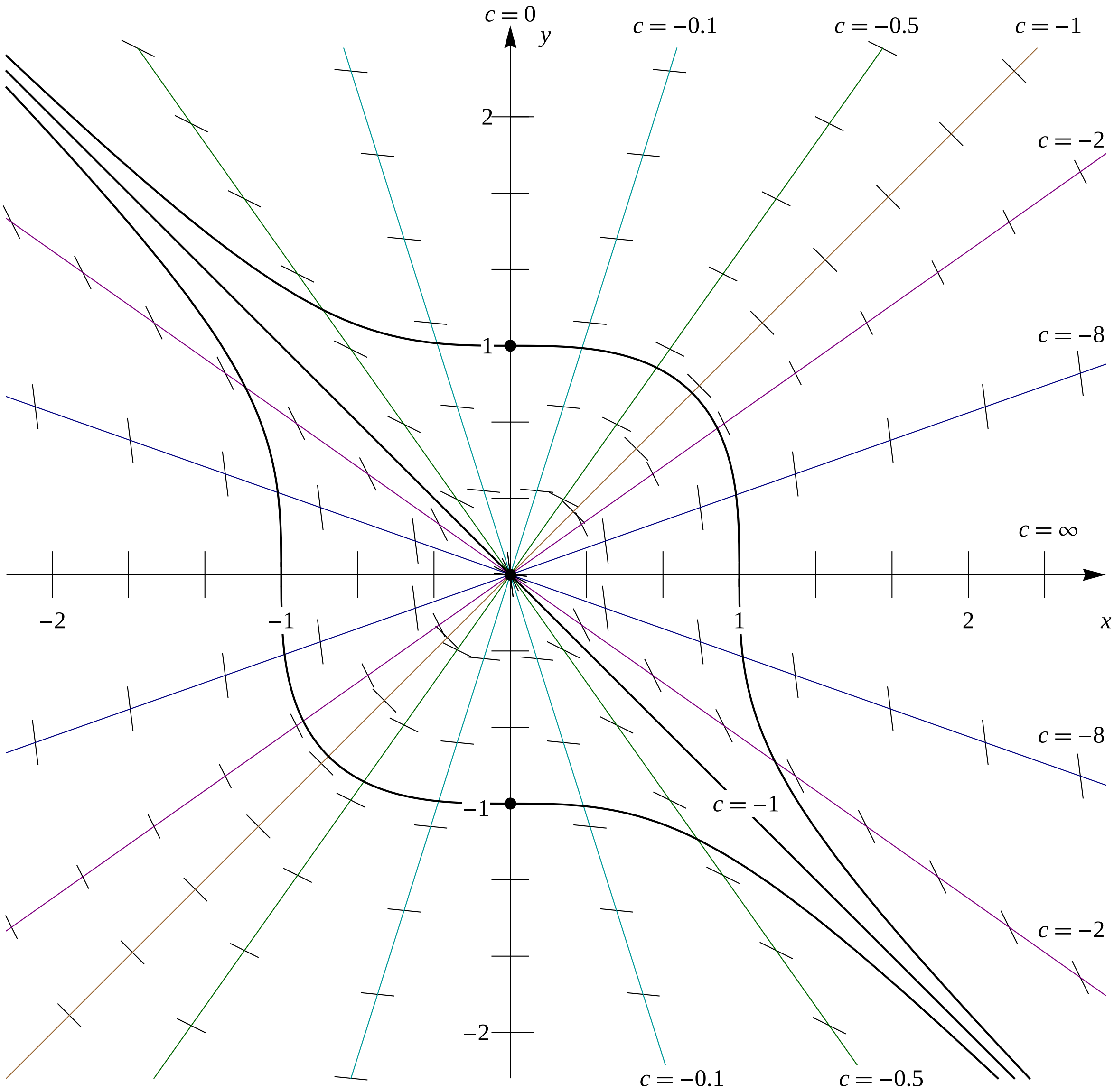


Fig. 1: Les points indiquent les conditions initiales données.

Comme $y(0)^3 = C$, les solutions pour les conditions initiales données correspondent aux choix de $C = -1$, $C = 0$ et $C = 1$ et l'on obtient respectivement (voir la remarque en bas) les solutions maximales $y(x) = \sqrt[3]{-1-x^3}$ sur $]-\infty, -1[$ et $y(x) = -\sqrt[3]{1+x^3}$ sur $]-1, +\infty[$ (cas $C = -1$), $y(x) = -x$ sur $]-\infty, 0[$ et $y(x) = -x$ sur $]0, +\infty[$ (cas $C = 0$), $y(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ sur $]-\infty, 1[$ et $y(x) = -\sqrt[3]{-1+x^3}$ sur $]1, +\infty[$ (cas $C = 1$). On vérifie alors que ces fonctions correspondent aux trajectoires sur la Fig. 1 ($C = -1$: courbe inférieure; $C = 0$: droite $y = -x$; $C = 1$: courbe supérieure).

Remarque : réécrite sous la forme requise par le théorème d'existence et d'unicité l'équation devient :

$$y' = -\frac{x^2}{y^2} =: f(x, y)$$

Cette fonction f, ainsi que la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\frac{x^2}{y^3}$ (voir la semaine 6 pour les détails), sont des fonctions rationnelles et donc continues en tout point de leur *domaine de définition*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \neq 0\}$$

(voir la semaine 5 pour les détails). On a donc une solution unique de l'équation différentielle passant par tout point de D. Les points de la forme $(x, 0)$ ne sont pas couvert par le théorème d'existence et d'unicité (au moins pas si on cherche une solution qui passe par ces points sous la forme d'une fonction $y(x)$). Ceci se manifeste dans les solutions par la divergence de $y'(x)$ en $x = -1$ (cas $C = -1$) et en $x = 1$ (cas $C = 1$). Le cas $C = 0$ est encore plus particulier. On pourrait admettre que la fonction $y(x) = -x$ soit une solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ dans la mesure où $\lim_{x\to 0} f(x, y(x)) = -1 = \lim_{x\to 0} y'(x)$.

Exercice 4.

i) L'équation différentielle $y' = 5\,(y^4)^{1/5}$ est à variables séparées. Par intégration on obtient

$$\frac{dy}{5\,(y^4)^{1/5}} = dx \qquad \Leftrightarrow \qquad y^{1/5} = x - C, \quad C \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = (x-C)^5, \quad C \in \mathbb{R}.$$

De plus, on a la solution triviale $y = 0$ qu'on avait perdue en divisant par $(y^4)^{1/5}$.

Avec ceci, on n'a pas encore trouvé toutes les solutions de l'équation donnée. Il manque les combinaisons par morceaux des solutions décrites ci-dessus, combinées de telle sorte que le résultat soit une fonction continûment différentiable. Les trois éléments qu'on peut combiner sont donc les parties positive et négative de la fonction $(x-C)^5$ pour des valeurs distinctes de C et la fonction triviale $y = 0$. L'ensemble des solutions est ainsi donnée par

$$y(x) = \begin{cases} (x-C_1)^5 & x < C_1 \\ 0 & C_1 \le x \le C_2 \\ (x-C_2)^5 & x > C_2 \end{cases} \qquad \text{où} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad C_1 \le C_2 \tag{1}$$

$$y(x) = \begin{cases} (x-C)^5 & x < C \\ 0 & x \ge C \end{cases} \qquad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \le C \\ (x-C)^5 & x > C \end{cases} \qquad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Notons que la solution obtenue par intégration, $y(x) = (x-C)^5$, correspond à (1) avec $C_1 = C_2$.

ii) Pour que $y(-3) = (-3-C)^5 = -1$, il faut que $C = -2$ et pour que $y(2) = (2-C)^5 = 1$, il faut que $C = 1$. La trajectoire cherchée est donc la solution (1) avec $C_1 = -2$ et $C_2 = 1$. C'est la courbe épaisse sur la Fig. 2 qui montre quelques solutions $y(x)$ ainsi que les points $(-3,-1)$ et $(2,1)$.

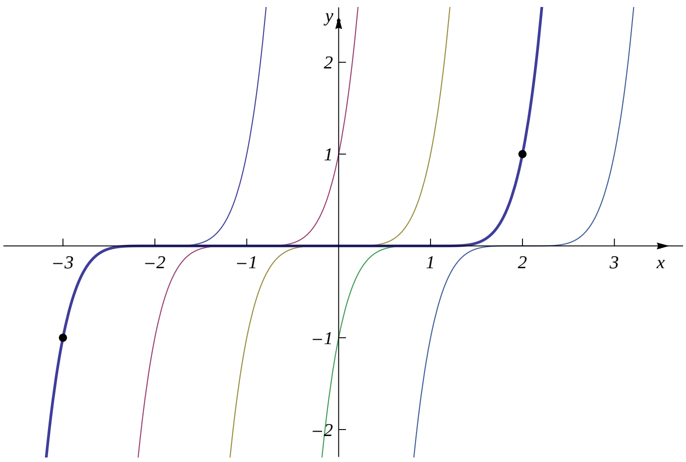


Fig. 2

Exercice 5. (QCM : problème de Cauchy)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $x\,y' - y = x$ pour $x \in]0, \infty[$ avec la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie

- ☐ $y(2) = \ln(2)$
- ■ $y(2) = 2\ \ln(2)$
- ☐ $y(2) = -2\ \ln(2)$
- ☐ $y(2) = 2\ \ln(2) + 2$

Exercice 6. (QCM : séparation des variables)

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\frac{1}{2} y' \sin(y) = (4x^3 + 3x)\ \cos(y)^2$ qui sont définies sur tout $\mathbb{R}$ est donnée par :

- ☐ $y(x) = \pm \arcsin\left(\dfrac{1}{2x^4 + 3x^2 + C}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$
- ■ $y(x) = \pm \arccos\left(\dfrac{1}{2x^4 + 3x^2 + C}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $y(x) = \pm \arccos\left(e^{-\frac{2}{2x^4+3x^2+C}}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $y(x) = \pm \arccos\left(\dfrac{-1}{2x^4 + 3x^2 + C}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 7. (QCM : séparation des variables)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y' - \cos(x)\,y + \cos(x)\,y^2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ est :

- ■ $y(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-\sin(x)}}$
- ☐ $y(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\sin(x)}}$
- ☐ $y(x) = -\dfrac{1}{2} e^{-\sin(x)}$
- ☐ $y(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-\frac{1}{2}\sin(x)}}$

Exercice 8. (QCM : problème de Cauchy)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y'' - 8y' + 41y = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $y(0) = 7$ et $y'(0) = -2$ est :

- ☐ $y(x) = e^{5x}\left(7\cos(4x) - \dfrac{37}{4}\sin(4x)\right)$
- ☐ $y(x) = (-37x + 7)e^{5x}$
- ☐ $y(x) = 37e^{4x} - 30e^{5x}$
- ■ $y(x) = e^{4x}\,(7\cos(5x) - 6\sin(5x))$