2.4. Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition: on appelle suite de points de $\mathbb{R}^n$ (ou suite dans $\mathbb{R}^n$) toute application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

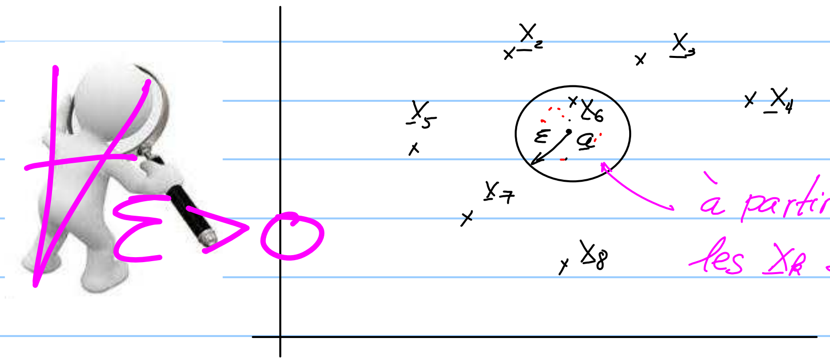
Notation (pour les suites) : on pose $\underline{x}_k = f(k)$ et on écrit $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ ou encore $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots$ pour les suites

Définition: une suite $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ est convergente et admet pour limite (ou converge vers) $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, et l'on écrit

$$\lim_{k \to \infty} \underline{x}_k = \underline{a},$$

si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$ on a que $\underline{x}_k \in B(\underline{a}, \varepsilon)$ c.-à-d. $d(\underline{x}_k, \underline{a}) = \|\underline{x}_k - \underline{a}\| \leq \varepsilon$.

Illustration



à partir d'un certain k_0 tous les x_k sont dans $B(\underline{a}, \varepsilon)$.

Définition: une suite $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ est bornée, s'il existe $C > 0$, tel que pour tout $k \geq 0$ $\underline{x}_k \in B(0, C)$ $(\Leftrightarrow d(0, \underline{x}_k) \leq C \Leftrightarrow \|\underline{x}_k\| \leq C)$

Autres notions identiques à Analyse I

- définition d'une suite divergente
- définition d'une suite de Cauchy
- sous-suites, Théorème de B.W. (Bolzano-Weierstrass)
- le fait que $\mathbb{R}^n$ est complet (toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{R}^n$ converge vers un élément de $\mathbb{R}^n$) ($\mathbb{Q}^n$ n'est pas complet)
- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé complet = espace de Banach

Théorème: une suite $(\underline{x}_k)$, $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

⌈Démonstration: voir la série 7B⌋

Théorème: (Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}^n$)

Soit $(\underline{x}_k)_{k\geq 0}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une sous-suite $(\underline{x}_{k_j})_{j\geq 0}$ qui est convergente.

⌈Démonstration: voir la série 7B⌋

2.5. Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Définition (limite = limite épointée) Soit $f : D \to \mathbb{R}^m$ et $\underline{x}^*$ un point d'accumulation de $D \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f admet pour limite (épointée) $\underline{\ell} \in \mathbb{R}^m$ lorsque $\underline{x}$ tend vers $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$, si pour toute suite $(\underline{x}_k)_{k\geq 0}$, $\underline{x}_k \in D \setminus \{\underline{x}^*\}$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{x}^*$ la suite $(\underline{y}_k)_{k\geq 0}$, $\underline{y}_k = f(\underline{x}_k)$ converge et $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{y}_k = \underline{\ell}$ (le même ℓ pour toutes les suites!)

Notation $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^*} f(\underline{x}) = \ell$

$(\underline{x} \neq \underline{x}^*)$ ← si on veut souligner que c'est la limite épointée

Définition: (continuité) une fonction $f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ est continue en $\underline{x}^* \in D$, si $\underline{x}^*$ est est un point isolé de D, ou si

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^*} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^*)$$

(existence de la limite et égalité avec la valeur $f(\underline{x}^*)$)

2.6. Autres normes sur $\mathbb{R}^n$

Proposition: les fonctions $\|\_\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définies pour $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p \in [1, \infty[$ par

$$\|\underline{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

et pour $p = \infty$ par

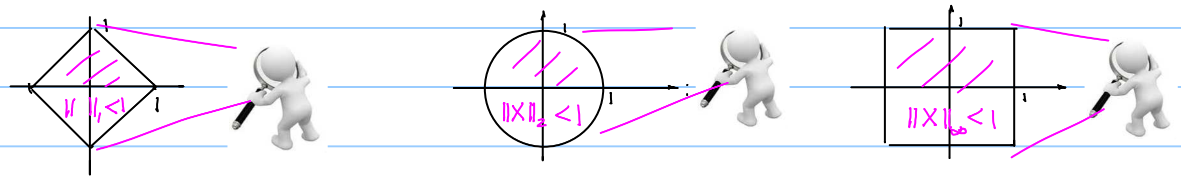
$$\|\underline{x}\|_\infty := \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \}$$

définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration: voir série 8B.

Notation: $\|\underline{x}\|_2 \equiv \|\underline{x}\|$ (la norme Euclidienne)

Illustration:



Boule ouverte centrée en zéro de rayon $r=1$, dans les normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$

Estimation d'une norme par une autre

<u>$n=1$:</u> $\|\underline{X}\|_2 = \|\underline{X}\|_\infty = \|\underline{X}\|_1$ même chose à chaque fois

<u>$n=2$:</u> soit $\underline{X} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

① $\|\underline{X}\|_1 = |x|+|y| = \sqrt{x^2+y^2+2|x||y|} \geq \sqrt{x^2+y^2} = \|\underline{X}\|_2$

② $\sqrt{2}\,\|\underline{X}\|_2 = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2x^2+2y^2} = \sqrt{(|x|+|y|)^2+\underbrace{(|x|-|y|)^2}_{\geq 0}} \geq |x|+|y| = \|\underline{X}\|_1$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{2}}\|\underline{X}\|_1 \overset{②}{\leq} \|\underline{X}\|_2 \overset{①}{\leq} \|\underline{X}\|_1$

$\left(\Leftrightarrow \|\underline{X}\|_2 \overset{①}{\leq} \|\underline{X}\|_1 \overset{②}{\leq} \sqrt{2}\,\|\underline{X}\|_2\right)$

Définition: deux normes $\| \|_a$ et $\| \|_b$ sur un espace vectoriel V sont dites équivalentes, s'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que pour tout $\underline{X} \in V$
$$C_1 \|\underline{X}\|_a \leq \|\underline{X}\|_b \leq C_2 \|\underline{X}\|_a$$

Théorème: sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes et en particulier, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \| \underline{x} \|_1 \leq \| \underline{x} \|_2 \leq \| \underline{x} \|_1$$
$$\| \underline{x} \|_\infty \leq \| \underline{x} \|_2 \leq \sqrt{n} \| \underline{x} \|_\infty$$

Voir la série 4A

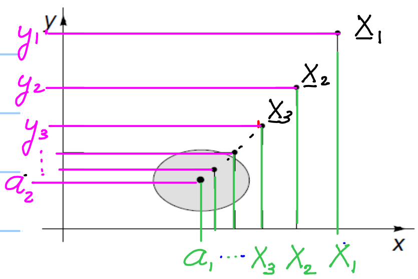
Proposition 2.6 soit $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$, $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ et $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Alors:

$$\lim_{k \to \infty} \underline{x}_k = \underline{a} \iff \lim_{k \to \infty} x_{k,i} = a_i \quad , i = 1, \dots, n.$$

définie avec la norme Euclidienne:
$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0$, t.q. $\forall k \geq k_0$
$\| \underline{x}_k - \underline{a} \| \leq \varepsilon$.

convergence des suites des composantes

Illustration $(n = 2,\ \underline{x}_k = (\underset{\substack{\parallel \\ x_k}}{x_{k,1}}, \underset{\substack{\parallel \\ y_k}}{x_{k,2}}),\ \underline{a} = (a_1, a_2))$.



Démonstration

"$\Rightarrow$" $\quad |x_{k,i} - a_i| \leq \max_i |x_{k,i} - a_i| = \| \underline{x}_k - \underline{a} \|_\infty \leq$

$$\leq \| \underline{x}_k - \underline{a} \|_2 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

"$\Leftarrow$" $\quad \| \underline{x}_k - \underline{a} \|_2 \leq \| \underline{x}_k - \underline{a} \|_1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_{k,i} - a_i|}_{\xrightarrow[k \to \infty]{} 0,\ \forall i} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

un nombre fini de termes

INTERMEZZO

Définition (continuité, $\varepsilon-\delta$)

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, et $\underline{x}^* \in D$. Alors f est dite continue en $\underline{x}^*$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, t.q. $\forall \underline{x} \in D$

$$\|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*)\| \leq \varepsilon.$$

Remarques:

- f est continue en $\underline{x}^*$ indépendament du choix des normes dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Pourquoi ?

- on devrait s'attendre que la bonne définition serait de demander $0 < \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta$ (comme pour la limite épointée), mais pour les points d'accumulation $\in D$ ceci ne change pas la définition, car $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*) = 0$ si $\underline{x} = \underline{x}^*$ et l'implication est trivialement satisfaite. De plus cette définition inclut la continuité pour $\underline{x}^*$ un point isolé (voir la définition avec les suites).

- on peut écrire $\ldots < \varepsilon$ et $\ldots < \delta$ au lieu de $\ldots \leq \varepsilon$ et $\ldots \leq \delta$, sans que ça change la définition (pourquoi ?).

Proposition Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors $\| \ \|$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.

voir la série 4A

Démonstration (avec $\varepsilon-\delta$, avec les suites voir série 4A)

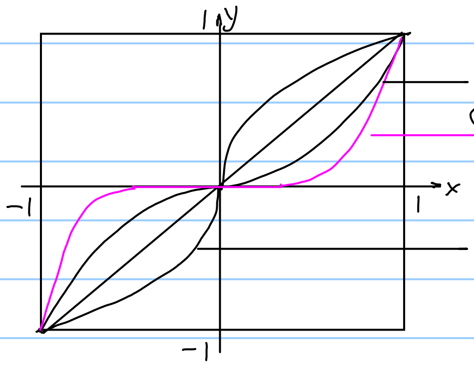
Soit $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$, t.q. $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta) \Rightarrow \left| \|\underline{x}\| - \|\underline{x}^*\| \right| \leq \varepsilon.$$

Car, avec $\delta = \varepsilon$ et la propriété iv) de la norme :

$$\left| \|\underline{x}\| - \|\underline{x}^*\| \right| \leq \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta = \varepsilon$$

Fonctions réciproques



$y = x^3$; fonction strictement monotone

fonction monotone.

$$y = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \geq 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \equiv I$$

$$x \longmapsto f(x) = x^3$$

- continue sur I
- dérivable sur I
- continûment dérivable sur I
- monotone
- strictement monotone
- bijective
- $\exists f^{-1}$ (existence d'une fonction réciproque)
- f^{-1} continue sur I.
- f^{-1} n'est pas dérivable en $x=0$ (donc pas dérivable sur I)

Théorème (de la bijection)
Soient I_1 et I_2 deux intervalles fermés, et $f : I_1 \longrightarrow I_2$ une fonction continue, strictement monotone et surjective. Alors, f admet une fonction réciproque, $f^{-1} : I_2 \longrightarrow I_1$, et f^{-1} est une fonction continue strictement monotone et surjective.

Démonstration: voir Analyse I

Théorème
Soient I_1, I_2 et f comme dans le théorème précédent. Si de plus f est continument dérivable sur I_1 et si $\forall x \in I_1$, $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est continument dérivable sur I_2

Démonstration: voir Analyse I

Remarques:

- $f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, définie par $f(x) = x^3$ satisfait les conditions du théorème de la bijection, mais pas celles du deuxième théorème car $f'(0) = 0$.

- l'exemple standard d'une fonction dérivable en tout point d'un intervalle fermé, mais qui n'est pas continument dérivable est

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On trouve.

$$f' : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right) = 0$$

mais $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$ n'existe pas.