3. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$

Notation: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m \;,\; D \subset \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^{T}$$

transposé

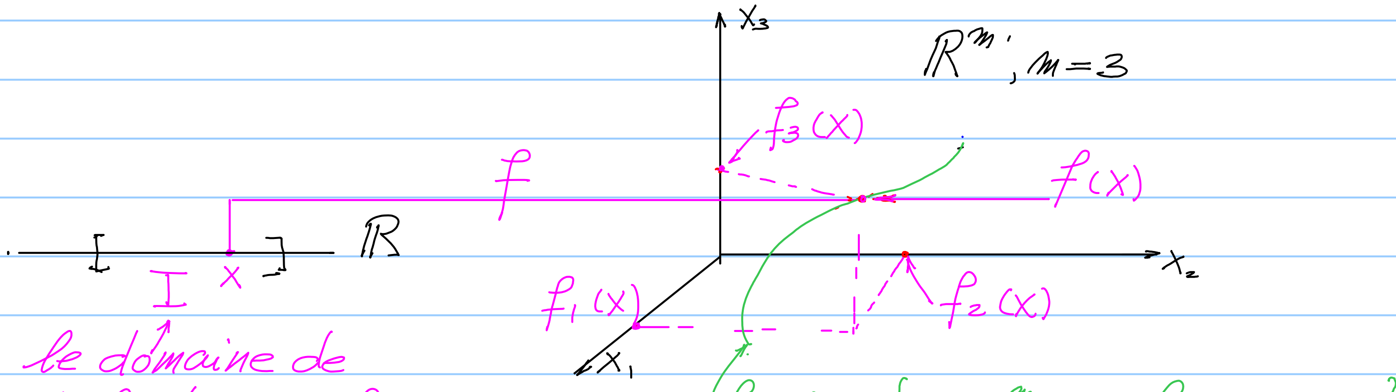
avec $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ les composantes de f.

3.0. Fonctions continues

Définition: une fonction continue $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (fermé) est appelée un chemin, ou une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^m$.

Remarque: la proposition 2.6 implique qu'une fonction $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ est continue en un point $x \in I$ (ou sur I) si et seulement si les fonctions f_i, $i = 1 \dots m$, sont toutes continues en $x \in I$ (ou sur I).

Image d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle



$f(I) = \{ y \in \mathbb{R}^m : y = f(x),\ x \in I \}$

$=$ l'image ou la trace de f

Définition: l'image d'un chemin f s'appelle aussi la trace de f

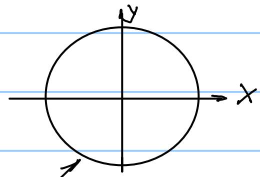
Exemple 1 $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))^T$$

$$g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\longmapsto (\cos(2t), \sin(2t))^T$$

$f \neq g$ mais la trace de f = la trace de g.



trace(f) = trace(g)

Exemple 2

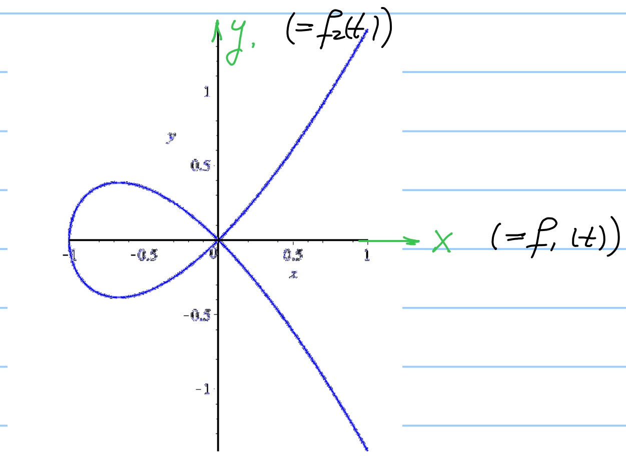
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$t \longmapsto f(t) = (\underset{\substack{\equiv \\ f_1(t)}}{t^2 - 1}, \underset{\substack{\equiv \\ f_2(t)}}{t^3 - t})^T$$

Trace de f ($\equiv$ image de f) $\subset \mathbb{R}^2$

$$Im(f) = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x,y)^T = f(t), t \in \mathbb{R} \}$$

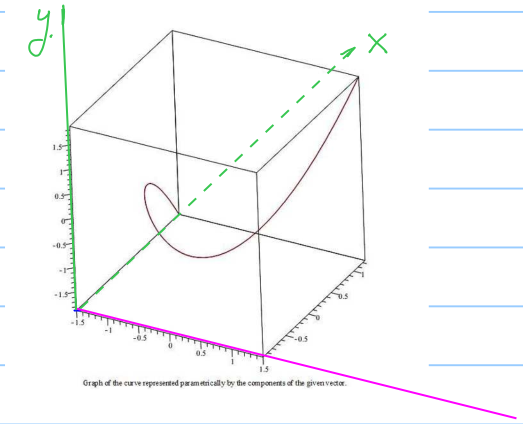
$\mathbb{R}^2$



Graphe (= graphique) de f $\subset \overbrace{\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2}_{\substack{\Downarrow \\ (t, (x,y)^T)}}}^{\mathbb{R}^3 \text{ isomorphe}}$ (noté $T(f)$)

On écrira $(t, x, y) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

$$T(f) = \{ (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : (x, y)^T = f(t) \}.$$



Graph of the curve represented parametrically by the components of the given vector.

voir maple00.mws.

Definition:

Soit $\mathcal{C} := \{\text{tous les chemins dans } \mathbb{R}^m\}$ (m est fixé)

Deux chemins $f : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sont équivalentes, $f \sim g$, s'il existe une fonction continue, strictement monotone et surjective $\omega : I_1 \rightarrow I_2$ telle que $\forall t_1 \in I_1$, $g(\omega(t_1)) = f(t_1)$

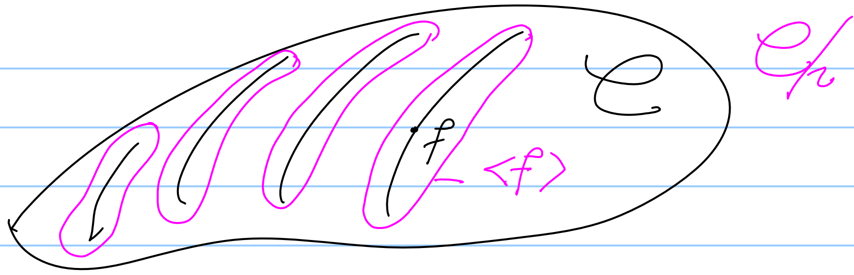
i) reflexive $\forall t_1 \in I_1$, $\underbrace{f(\overset{\omega(t_1)}{\overset{\parallel}{t_1}}) = f(t_1)}_{f \sim f}$ (choisir $\omega(t_1) = t_1$).

ii) symétrique $\forall t_1 \in I_1$, $\underbrace{g(\omega(t_1)) = f(t_1)}_{f \sim g} \Leftrightarrow \forall t_2 \in I_2$ $\underbrace{f(\omega^{-1}(t_2)) = g(t_2)}_{g \sim f}$

iii) transitive $\forall t_1 \in I_1$, $\underbrace{g(\omega_1(t_1)) = f(t_1)}_{f \sim g \text{ avec } \omega_1}$ et $\forall t_2 \in I_2$ $\underbrace{h(\omega_2(t_2)) = g(t_2)}_{g \sim h \text{ avec } \omega_2}$

$$\Rightarrow \forall t_1 \in I_1, \; h(\underbrace{\omega_2(\omega_1(t_1))}_{=(\omega_2 \circ \omega_1)(t_1)}) = g(\omega_1(t_1)) = f(t_1)$$

ce qui veut dire que $f \sim h$ avec $\omega_2 \circ \omega_1 : I_1 \longrightarrow I_3$, (continue, strictement monotone et surjective).



Definition : une classe d'équivalence de chemins est appelée une courbe continue, et on note $\langle f \rangle$ la classe d'équivalence qui contient f

Terminologie : soit γ une courbe continue. On appelle $f \in \gamma$ aussi une paramétrisation de la courbe continue γ

3.1. Fonctions dérivables (ou différentiables)

Définition (provisoire) :

"moins" entre deux vecteurs

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (*)$$

définition "usuelle" de la dérivée en un point

Proposition : soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (fermé). Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$, est dérivable en $x \in I$ (ou sur I) si et seulement si les fonctions f_i, $i = 1, \ldots, m$ sont toutes dérivables en $x \in I$ (ou sur I)

Explication

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right)$$

par définition (*)

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}, \ldots, \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h}\right)^T$$

calcul dans l'espace vectoriel

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}, \ldots, \lim_{h\to 0} \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h}\right)^T$$

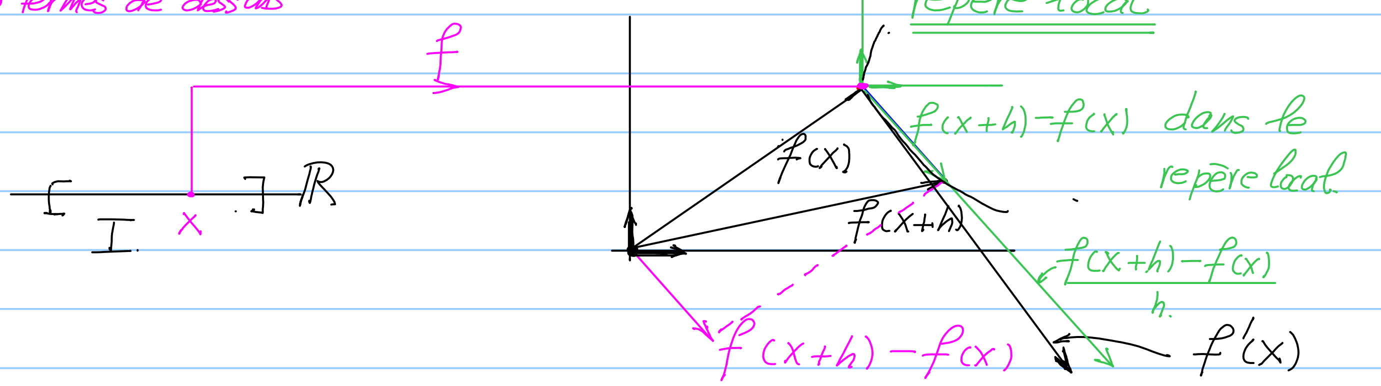
ceci est vrai par la proposition 2.6.

$$= \left(f_1'(x), \ldots, f_m'(x)\right)^T$$

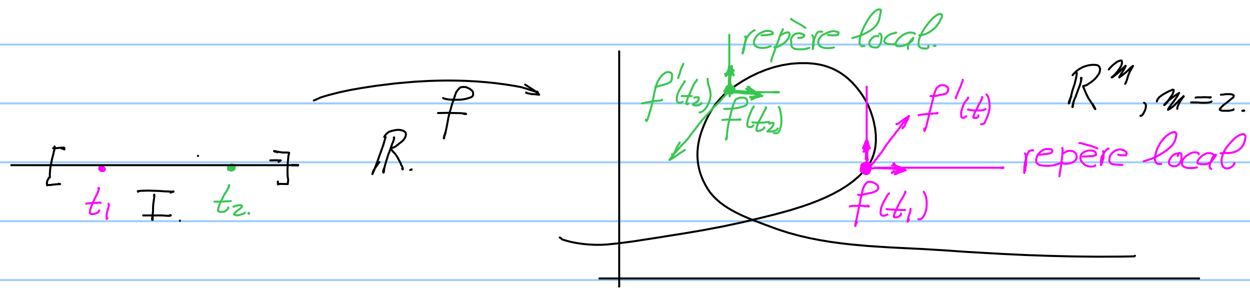
par la définition de la dérivée pour $f_1, \ldots, f_m$. $\square$

<u>Interprétation</u>: si on interprète $t \equiv x$ comme le temps et $f(t)$ comme la position d'un objet dans $\mathbb{R}^m$ ($m=3$ par exemple), alors $f'(t)$ est le vecteur de la vitesse instantanée de l'objet au temps t

<u>Graphiquement</u> (calcul de la limite, $m=2$)
"en termes de dessins"



Remarque: graphiquement, pour illustrer $f'(t)$, on "attache" en $f(t) \in \mathbb{R}^n$ une copie (dite locale) de $\mathbb{R}^n$.



Longueur d'un chemin continûment dérivable

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a<b$, un chemin continûment dérivable sur $[a,b]$ (c'est-à-dire $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ avec $f_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables). Alors sa longueur $\ell \in \mathbb{R}$ est par définition :

$$\ell := \int_a^b \| f'(t) \| \, dt$$

on suppose f' continue

la norme est une fonction continue de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

la norme Euclidienne

Remarque: comme sur l'ensemble des chemins continus on peut définir des classes d'équivalence sur l'ensemble des chemins continûment dérivables (demander que $\omega : I_1 \longrightarrow I_2$, qui définie l'équivalence soit de classe C^1 et tel que $\forall t_1 \in I_1$, $\omega'(t_1) \neq 0$). Les classes d'équivalence sont appelées courbes de classe C^1

<u>Remarque</u>: soit γ une courbe de classe C^1. Alors

$$|\gamma| := \int_a^b \|f'(t)\|\, dt \qquad (\text{longueur de } \gamma)$$

avec $f \in \gamma$ une paramétrisation continûment dérivable quelconque. Différentes paramétrisations donnent la même longueur, car changer la paramétrisation de la courbe revient à faire un changement de variables dans l'intégrale. Le vérifier !