

Analyse avancée II – Série 4A

Échauffement. (Propriétés d'ensembles)

Soit $X = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$. Trouver l'intérieur $\overset{\circ}{X}$ et l'adhérence \bar{X} de X . Trouver le bord ∂X de X , les points isolés de X , ainsi que les points d'accumulation de X .

Exercice 1. (Points d'accumulation)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide et soit A l'ensemble des points d'accumulation de X . Montrer que pour tout $a \in A$ il existe une suite $(x_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de X , telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Exercice 2. (Suites dans \mathbb{R}^n)

Montrer que toute suite convergente dans \mathbb{R}^n est bornée.

Exercice 3. (Normes)

Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$

$$i) \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \qquad ii) \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

Exercice 4. (Continuité des normes)

Montrer que toute norme sur \mathbb{R}^n est une fonction continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Exercice 5. (QCM : ensembles)

Soit la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \ln(4 - (x + y)^2)$$

où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le plus grand sous-ensemble de \mathbb{R}^2 sur lequel l'expression $f(x, y)$ est bien définie. Alors :

- l'ensemble D n'est ni fermé, ni borné.
- l'ensemble D est borné mais pas fermé.
- l'ensemble D est fermé mais pas borné.
- l'ensemble D est fermé et borné.

Exercice 6. (Longueur d'un chemin)

Trouver la longueur du chemin $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)^T$.

Exercice 7. (Chemins)

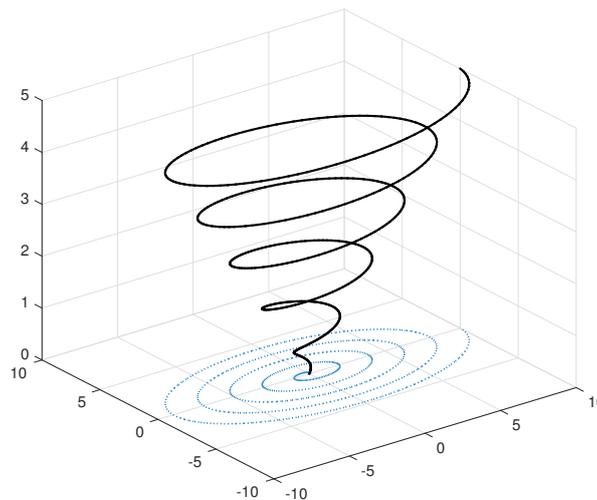
Soit la fonction $f : [0, 2\pi + 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = \begin{cases} (1 + \cos(t), \sin(t))^T & \text{si } t \in [0, \pi), \\ (-1 - \cos(t), \sin(t))^T & \text{si } t \in [\pi, 2\pi), \\ (-2 - 2\pi + t, 0)^T & \text{si } t \in [2\pi, 2\pi + 4]. \end{cases}$$

- i)* Montrer que f définit un chemin, c'est-à-dire montrer que f est une fonction continue.
- ii)* Esquisser la trace de f .
- iii)* Est-ce que la fonction f est injective ?
- iv)* Calculer la longueur du chemin f .

Exercice 8. (Paramétrisations)

Soient une courbe ainsi que sa projection sur le plan x - y illustrées dans la figure suivante :



Laquelle parmi les suivantes pourrait être une paramétrisation de cette courbe ?

- $(x, y, z) = (t \cos(2\pi t), 2t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- $(x, y, z) = (t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- $(x, y, z) = (2t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- $(x, y, z) = (2 \cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$