Peter Wittwer


# Analyse avancée II – Série 4B

**Échauffement.** (Linéarité)

Soient $p$, $q$ et $r$ des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$, ainsi que l'équation linéaire homogène associée, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Montrer que :

*i)* si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions quelconques de l'équation sur $I$, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $\alpha + \beta = 1$, la fonction $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de l'équation sur $I$.

*ii)* si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions quelconques de l'équation sur $I$, alors la fonction $y = y_1 - y_2$ est solution de l'équation linéaire homogène associée sur $I$.

*iii)* l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène associée est un espace vectoriel.

**Exercice 1.** (Réduction de l'ordre)

*i)* Soient $p$ et $q$ des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, et soit $y_1$ est une solution non nulle de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sur $I$. Trouver l'équation différentielle du première ordre que l'on obtient si on pose $y = U\, y_1$, avec $U$ une primitive d'une nouvelle fonction inconnue $u$ (méthode de la réduction de l'ordre, voir le cours).

*ii)* Soit l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et soit $y_1(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Utiliser la méthode de la réduction de l'ordre pour trouver une deuxième solution linéairement indépendante de $y_1(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 2.** (Deuxième ordre à coefficients constants)

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = 0$.

*i)* Montrer que l'idée de la réduction de l'ordre permet de trouver la solution $y_2$ pour le deuxième cas du §1.5.2 du cours.

*ii)* Montrer que l'expression donnée pour le troisième cas du §1.5.2 du cours s'obtient par la formule d'Euler (c.-à-d. $\forall \phi \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ ) à partir des deux solutions exponentielles complexes.

**Exercice 3.** (Wronskien)

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, avec $p$ et $q$ des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions quelconques de l'équation sur $I$, et soit $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ le Wronskien des deux solutions.

*i)* Montrer que si les deux solutions $y_1$ et $y_2$ sont linéairement dépendantes, alors $\forall x \in I$ $w(x) = 0$.

*ii)* Montrer que s'il existe $x_0 \in I$ tel que $w(x_0) = 0$, alors $\forall x \in I$ $w(x) = 0$ et les solutions $y_1$ et $y_2$ sont linéairement dépendantes.

*iii)* Montrer que la dimension de l'espace vectoriel des solutions est deux.