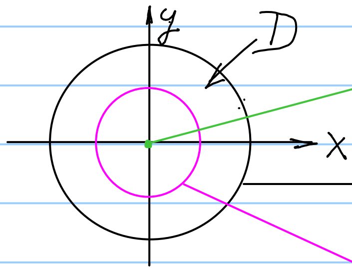
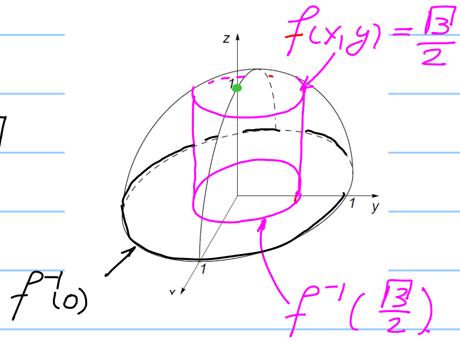
$n=2$: retour aux exemples 1–3 du chapitre 4.1

Exemple 1

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}\ , \quad \mathrm{Im}(f) = [0,1]$$





$$f^{-1}(1) = \{(0,0)\}$$

$$f^{-1}(0) = \{(x,y) \in D : x^2+y^2=1\}$$

$$f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \{(x,y) \in D : x^2+y^2 = \frac{1}{4}\}$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{3}{4} = 1-x^2-y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{4}$$

Exemple 2

$D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = a\cdot x + b\cdot y + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ donnés

i) $a = b = 0$, $\mathrm{Im}(f) = \{c\}$

$$f^{-1}(c) = \mathbb{R}^2$$

ii) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \ni c^*$

$$f^{-1}(c^*) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax+by+c = c^*\}$$

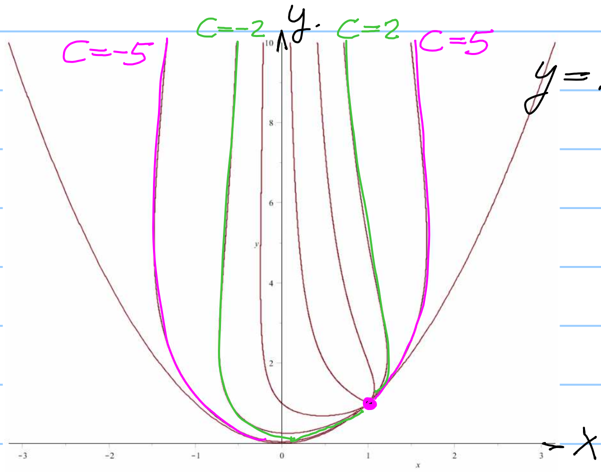
$$\Updownarrow$$

$$ax+by+(c-c^*) = 0$$

ce sont des droites dans le plan (x,y).

Exemple 3

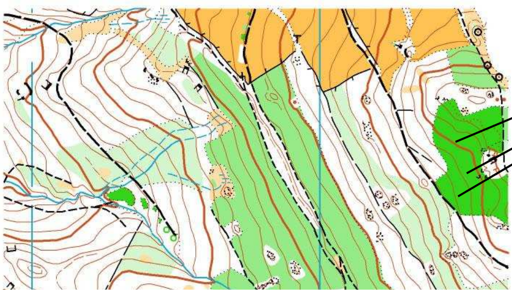
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\}, \quad f(x,y) = \frac{xy-1}{\sqrt{y-x^2}}, \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$$



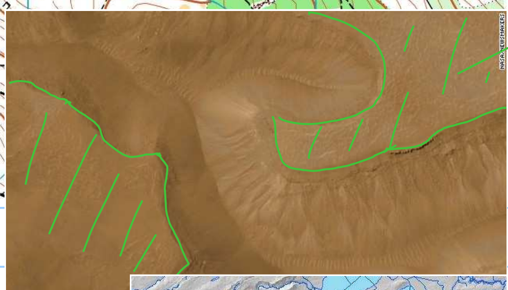
lignes de niveau de f de niveau c.

Le fait que plusieurs lignes de niveau "terminent" en le point $(1,1)$ implique la non-existence de la limite $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

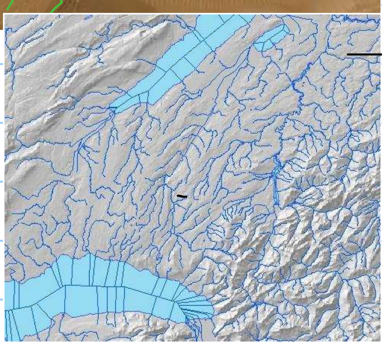
Cartes géographiques



lignes de niveau



plateau de niveau (sur mars)



carte hydrographique, à discuter plus loin.

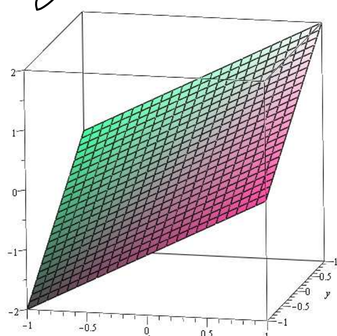
4.4. Limites et continuité (d'une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

<u>Exemple 1</u> : (opérations algébriques)

i) Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) = x+y$

f est continue en chaque point $(x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} \underbrace{f(x,y)}_{= x+y} = \underbrace{f(x^*,y^*)}_{= x^*+y^*}$$



moodle002.

<u>Démonstration</u>

<u>avec les suites</u> : soit (x_n,y_n) une suite telle que $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x^*,y^*) \in \mathbb{R}^2$, et $(x_n,y_n) \neq (x^*,y^*)$. Alors

$$|(x_n+y_n) - (x^*+y^*)| = |(x_n-x^*) + (y_n-y^*)|$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{|x_n - x^*|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{|y_n-y^*|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}}_{\text{par la proposition 2.6.}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>avec $\varepsilon-\delta$</u> : on a

$$\|f(x,y) - f(x^*,y^*)\|_2 = |(x+y) - (x^*+y^*)|$$

$$\leq |x-x^*| + |y-y^*| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \sqrt{2} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_2 .$$

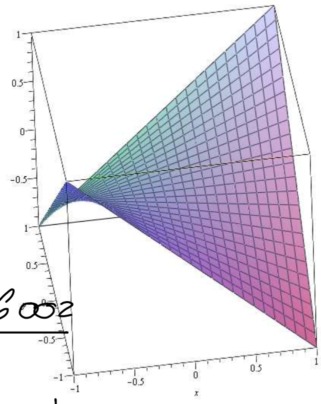
donc, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta$ ($\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$, par exemple) tel que

$$\left((x,y) \in D = \mathbb{R}^2, \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\| \leq \delta \right) \Longrightarrow \|f(x,y) - f(x^*,y^*)\| \leq \varepsilon$$

ii) soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) = x \cdot y$

f est continue en chaque point $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} \underbrace{f(x,y)}_{x\cdot y} = \underbrace{f(x^*,y^*)}_{x^*\cdot y^*}$$



Démonstration :

mood6002

$$|x\cdot y - x^*\cdot y^*| = |(x-x^*)y + x^*(y-y^*)|$$

$$\leq |x-x^*|\cdot|y| + |x^*||y-y^*| \qquad (*)$$

Soit (x_n, y_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x^*, y^*)$.

Il existe alors $C>0$, tel que $\forall n$, $|y_n| \leq C$, car toute suite convergente est bornée. (voir série 4A)
En utilisant $(*)$ on a donc

$$|x_n \cdot y_n - x^*\cdot y^*| \leq |x_n - x^*|\cdot C + |x^*||y_n - y^*| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

par la proposition 2.6

Conséquence de i) et ii) et que la fonction

$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Théorème Les fonctions polynôme de deux (ou plusieures variables, ainsi que les fonctions rationnelles de deux (ou plusieures) variables sont toutes continues sur leur domaine de définition.

Exemple 2 (non existence d'une limite)

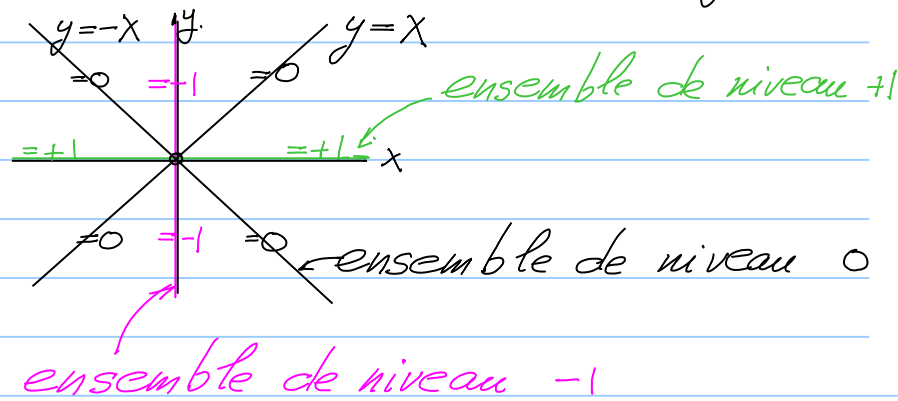
i) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \equiv D$

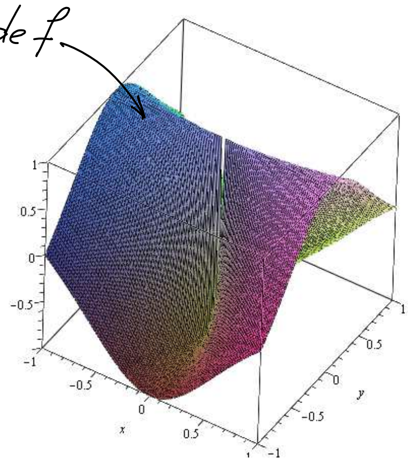
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

f continue sur D (car f une fonction rationnelle)

Ensembles de niveau

graphe de f





la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas, car pour toute suite de la forme $(x_n, 0)$ telle que $x_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

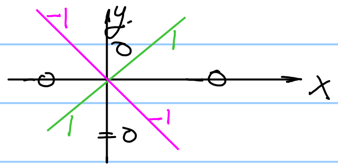
$$f(x_n,0) = \frac{x_n^2 - 0^2}{x_n^2+0^2} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \, ,$$

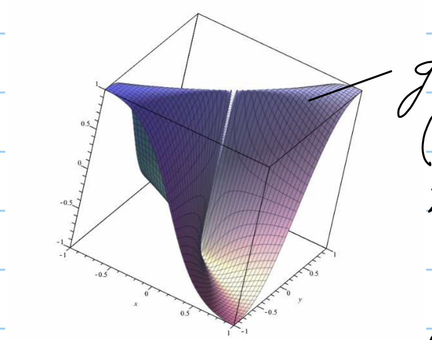
par contre pour toute suite de la forme $(0, y_n)$ telle que $y_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ on a

$$f(0,y_n) = \frac{0^2 - y_n^2}{0^2+y_n^2} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \neq 1.$$

ii) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \equiv D$

<u>Ensembles de niveau</u>





graphe de $f \equiv \Gamma(f)$
(voir aussi Maple002)

f continue sur D (car f une fonction rationnelle)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{n'existe pas car}$$

pour une suite de la forme (x_n, x_n) telle que $x_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

$$f(x_n, x_n) = \frac{2\, x_n \cdot x_n}{x_n^2 + x_n^2} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

par contre pour une suite de la forme $(x_n, -x_n)$ telle que $x_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

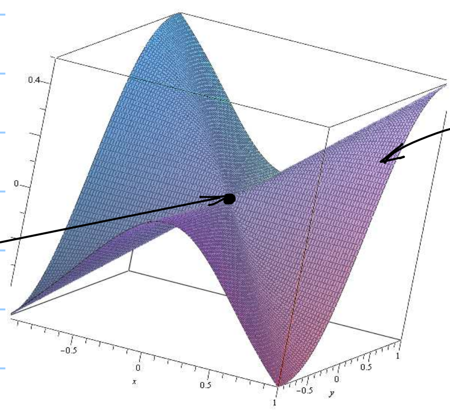
$$f(x_n, -x_n) = \frac{2\, x_n\,(-x_n)}{x_n^2 + (-x_n)^2} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \neq 1.$$

<u>Exemple 3</u> (existence d'une limite)

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad , \quad D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \equiv D$$

f continue sur D (car f une fonction rationnelle)

$$\boxed{\text{Proposition: } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$$



$\Gamma(f)$

Démonstration (deux techniques)

i) par une borne "adéquate"

pour $x\neq 0$ et $y\neq 0$ $\quad |f(x,y)| \leq \dfrac{x^2|y|}{x^2+0^2} \leq |y|$

pour $x=0$ et $y\neq 0$ $\quad f(x,y) = \dfrac{0^2 y}{0^2+y^2} = 0$

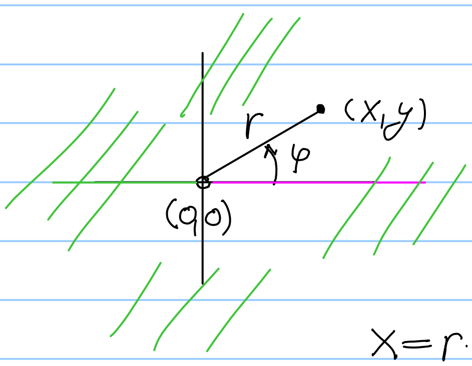
pour $x\neq 0$, $y=0$ $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$

En conclusion on a $|f(x,y)| \leq |y|$, $\forall (x,y)\in D$

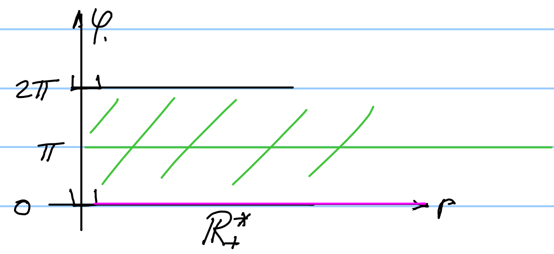
$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - \underbrace{0}_{\text{la valeur de la limite.}}| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)|$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \underbrace{=}_{\text{par la proposition 2.6.}} 0$$

ii) par coordonnées polaires (par rapport à $(x^*,y^*)=(0,0)$)



$\longleftrightarrow$ bijective



$x = r\cdot\cos(\varphi)$

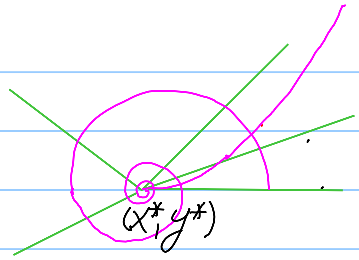
$y = r\cdot\sin(\varphi)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|$

$$\varphi = \begin{cases} 0, & y=0,\ x>0 \\ \pi + 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre exemple $(x^*,y^*)=(0,0)$. Pour toute suite (x_n,y_n) telle que $(x_n,y_n)\neq(x^*,y^*)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x^*,y^*)$ on a que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{(x_n-x^*)^2+(y_n-y^*)^2} = 0$, mais φ_n peut varier d'une manière quelconque dans $[0,2\pi[$.

Illustration:



Explication: différentes manières d'approcher (x^*, y^*) le long de droites ($\varphi_n = $ const. en coordonnées polaires), ou par d'autres manières ($\varphi_n = $ quelconque en coordonnées polaires).

Dans notre exemple, donné une suite arbitraire telle que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, $r_n > 0$ (mais φ_n arbitraires !) on a:

$$|f(x_n, y_n)| = |f(r_n \cdot \cos(\varphi_n), r_n \cdot \sin(\varphi_n))|$$

$$\underset{\text{dans notre exemple}}{=} \left| \frac{r_n^2 \cos(\varphi_n)^2 \cdot r_n \sin(\varphi_n)}{r_n^2} \right|$$

$$= |r_n \cdot \cos(\varphi_n)^2 \cdot \sin(\varphi_n)| \leq \cdot r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

cette borne est vraie pour toutes les suites φ_n

$\exists C$, t.q. $\forall \varphi$ ($C = 1$ ici)

Prolongement par continuité (voir Analyse I)

La fonction

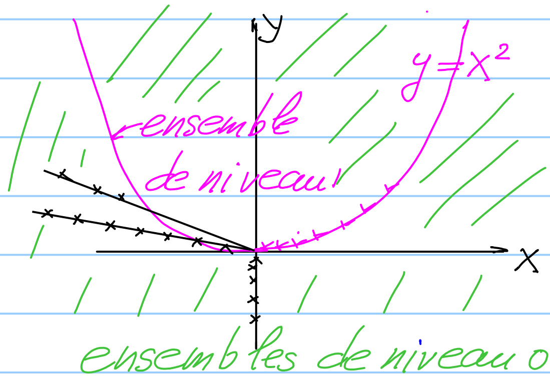
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4 (important ! il faut tester toutes les suites, c-à-d toutes les approches)

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y = x^2 \\ 0 & \text{pour } y \neq x^2. \end{cases}$$



On a :

$$\lim_{r \to 0+} f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) = 0 \quad \text{pour toute approche avec } \varphi \text{ fixe}$$

mais la limite $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas !, car

pour une suite de la forme (x_n, x_n^2) telle que $x_n \neq 0$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ on a

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, x_n^2) = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \neq 0.$$