Peter Wittwer

Analyse avancée II – Série 5A

Échauffement 1. (Courbes continues et courbes de classe C^1)

Soient les fonctions f, g, et h définies respectivement par

$$f\colon\ [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (\cos(t), \sin(t))^T$$
$$g\colon\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad g(x) = (\cos(2t), \sin(2t))^T$$
$$h\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad h(x) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\,\right)^T$$

Montrer que f, g, et h sont les trois des représentants d'une courbe continue, mais pas d'une courbe de classe C^1.

Exercice 1. (Longueur d'une courbe de classe C^1)

Montrer que la longueur d'une courbe de classe C^1 est bien définie, c'est-à-dire indépendante de sa paramétrisation.

Exercice 2. (Paramétrisation d'une courbe de classe C^1)

Soient les fonctions f et h comme dans l'Échauffement 1. Monter que pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ la restriction de la fonction f à l'intervalle $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ et la restriction de la fonction h à l'intervalle $[-\cos(\varepsilon), \cos(\varepsilon)]$ sont des chemins équivalents de classe C^1. Utiliser cette information pour montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

existe au sens d'une intégrale généralisée et calculer sa valeur.

Exercice 3. (Intégrales curvilignes)

Soit $f\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ et $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (-y,x)^T$. Calculer l'intégrale curviligne de F le long de la courbe $< f >$.

Échauffement 2. (Graphes)

Trouver l'image et esquisser le graphe des fonctions $f\colon [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ suivantes :

i) $f(x,y) = 1$ *ii)* $f(x,y) = x$ *iii)* $f(x,y) = y$ *iv)* $f(x,y) = x+y$

v) $f(x,y) = x-y$ *vi)* $f(x,y) = -x-y-1$

Exercice 4. (Limites)

Calculer les limites suivantes si elles existent:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-3y}{x+2y^2}$ *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ *c)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *d)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$

Ex. 5 - 9 au verso.

Exercice 5. (Limites)

Calculer les limites suivantes si elles existent:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{3/2}|y|^{3/2}}{x^2+y^4}$ *b)* *a)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{3/2}|y|}{x^2+y^4}$ *c)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)}$

Exercice 6. (Continuité)

Déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité au point $(0,0)$ des fonctions f dont l'expression pour $(x,y)\neq(0,0)$ est :

i) $\displaystyle f(x,y)=\frac{3x^3-2y^3}{x^2+y^2}$ *ii)* $\displaystyle f(x,y)=\frac{xy}{x^2+(2x-y)^2}$

iii) $\displaystyle f(x,y)=\frac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$ *iv)* $\displaystyle f(x,y)=xy\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Exercice 7. (V/F : limites et continuité)

Q1 : Soit une fonction $f\colon D\to\mathbb{R}$ et soit $(x_0,y_0)\in D$ où $D\subset\mathbb{R}^2$ est ouvert. Si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe, alors f est continue en (x_0,y_0).

Q2 : Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et soit une fonction $g\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{r\to0^+} g(r)=0$. S'il existe une valeur φ_0 de $\varphi\in[0,2\pi[$ telle que

$$\left|f\big(r\cos(\varphi_0),r\sin(\varphi_0)\big)\right|\le g(r)$$

pour tout $r\in\mathbb{R}^+$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\,.$$

Q3 : Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que $f(0,0)=0$. Si pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et tout $\beta\in\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{t\to0} f(\alpha t,\beta t)=0\,,$$

alors f est continue en $(0,0)$.

Exercice 8. (Question à rédaction détaillée)

Donner un exemple d'une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ qui n'admet pas de limite en $(0,0)$ mais satisfait pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\lim_{t\to0} f(t,\,\alpha\,t^2)=0\,.$$

Exercice 9. (V/F : limites)

Soit une fonction $f\colon D\to\mathbb{R}$ et soit $(x_0,y_0)\in D$ où $D\subset\mathbb{R}^2$ est ouvert. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ existe, alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y_0)$$

existe.