

Analyse avancée II – Série 5B

Échauffement. (Fonctions définies par des séries)

Soit la fonction $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln(x))^n$.

- i)* Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série converge absolument, c'est-à-dire montrer que la fonction f est bien définie.
- ii)* Montrer que la fonction f satisfait l'équation différentielle $y' + (1 + \ln(x))y = 0$ sur \mathbb{R}_+^* .
- iii)* Montrer que $f(2) = \frac{1}{4}$.

Exercice 1. (Fonctions définies par des séries)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{3n}$.

- i)* Montrer que le rayon de convergence de la série est $+\infty$ et que la fonction f est donc bien définie.
- ii)* Montrer que la fonction f satisfait l'équation différentielle $f'' + f' + f = e^x$ sur \mathbb{R} .
- iii)* Calculer la valeur de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 2. (Équations indépendantes de x)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{y}{1+y^2} ((y')^2 + 1) = 0.$$

Exercice 3. (Équations indépendantes de y)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{x}{1+x^2} ((y')^2 + 1) = 0.$$

Exercice 4. (Équations indépendantes de x et y)

Trouver par trois méthodes différentes la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - (y')^2 - 1 = 0.$$