

Analyse avancée II – Corrigé de la série 5B

Echauffement. (Fonctions définies par des séries)

i) On a $f(x) = g(x \ln(x))$, où $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$, et cette série converge absolument pour tout z (le rayon de convergence z est $+\infty$). La fonction f est donc bien définie. (A noter que $g(z) = e^{-z}$, et donc $f(x) = x^{-x}$, mais le but de cet échauffement est d'utiliser la représentation par la série).

ii) La série qui définit g peut être dérivée terme par terme :

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} z^{n-1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n = -g(z)$$

et donc, par dérivation en chaîne, $f'(x) = g'(x \ln(x)) (\ln(x) + 1) = -g(x \ln(x)) (\ln(x) + 1) = -f(x) (\ln(x) + 1)$ et donc $f' + (\ln(x) + 1) f = 0$.

iii) Par séparation des variables l'on obtient que $y(x) = Ce^{-x \ln(x)} = Cx^{-x}$. Avec $f(1) = g(0) = 1$ on trouve que $C = 1$ et donc $f(x) = x^{-x}$ et donc $f(2) = \frac{1}{4}$.

Exercice 1. (Fonctions définies par des séries)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{3n}$.

i) On par le critère de d'Alambert

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(3n)!}}{\frac{1}{(3(n+1))!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(3n+3)(3n+2)(3n+1)| = +\infty.$$

ii) A partir de f on obtient en dérivant terme par terme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{3n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{3n} \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} (3n) x^{3n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-1)!} x^{3n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} (3n)(3n-1) x^{3n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)!} x^{3n-2} \end{aligned}$$

et donc

$$(f + f' + f'')(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(3n-2)!} x^{3n-2} + \frac{1}{(3n-1)!} x^{3n-1} + \frac{1}{(3n)!} x^{3n} \right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x.$$

iii) Par la méthode des coefficients indéterminés on trouve que la solution générale de l'équation différentielle pour f est

$$f(x) = \frac{1}{3}e^x + C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

En évaluant la série pour f et pour f' en $x = 0$ on obtient que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, ce qui donne pour C_1 et C_2 les équations

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{3} + C_1 = 1 \\ f'(0) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne $C_1 = \frac{2}{3}$ et $C_2 = 0$. On a donc que

$$f(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

et on peut maintenant déterminer la somme demandée en évaluant la fonction f en $x = 1$:

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}e + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1.168058313\dots$$

Exercice 2. (Equations indépendantes de x)

On constate que $y(x) = 0$ est une solution sur \mathbb{R} . De plus, l'équation étant autonome, si $y(x)$ est une solution de l'équation, alors $\forall C_1 \in \mathbb{R}$, $y(x + C_1)$ est aussi une solution (sur le domaine translaté). On pose $y'(x) = u(y(x))$ avec $u(t)$ une nouvelle fonction inconnue. Donc $y''(x) = u'(y(x))y'(x) = (u'u)(y(x))$ et, en substituant dans l'équation, on trouve pour u l'équation différentielle

$$u'u - \frac{t}{1+t^2} (u^2 + 1) = 0$$

que l'on peut résoudre facilement par séparation des variables et l'on obtient pour $C > 0$:

$$\frac{1}{2} \ln(1 + u^2) = \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + \frac{1}{2} \ln(C),$$

ou encore, pour $C > 0$,

$$1 + u(t)^2 = C(1 + t^2).$$

Pour $C > 0$, $C \neq 1$ on obtient alors

$$u(t) = \pm \sqrt{Ct^2 + C - 1},$$

et pour $C = 1$

$$u(t) = \pm t,$$

avec $t \in \mathbb{R}$ si $C \geq 1$ et $|t| > \sqrt{\frac{1-C}{C}}$ si $0 < C < 1$.

Finalement, **il ne faut pas oublier** de résoudre pour les différents cas l'équation $y' = u(y)$. C'est-à-dire, si $C > 0$, $C \neq 1$, l'équation

$$y' = \pm \sqrt{C y^2 + C - 1},$$

et, si $C = 1$, les équations

$$y' = \pm y$$

.

i) $C > 1$

Par séparation des variables on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{C}{C-1}} y \right) = \pm (x + C_1),$$

avec $C_1 \in \mathbb{R}$. On obtient donc, pour chaque $C > 1$ donné, et quelque soit $C_1 \in \mathbb{R}$, la solution

$$y(x) = \sqrt{\frac{C-1}{C}} \sinh \left(\pm \sqrt{C} (x + C_1) \right),$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

ii) $C = 1$

Quelque soit $C_1 \in \mathbb{R}$ on a les solutions

$$y(x) = \pm e^{\pm(x+C_1)},$$

avec $x \in \mathbb{R}$, ainsi que la solution

$$y(x) = 0,$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

iii) $0 < C < 1$

Par séparation des variables on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{C}{1-C}} y \right) = \pm (x + C_1),$$

avec $C_1 \in \mathbb{R}$. On obtient donc, pour chaque $0 < C < 1$, et quelque soit $C_1 \in \mathbb{R}$, la solution

$$y(x) = \sqrt{\frac{1-C}{C}} \cosh \left(\pm \sqrt{C} x + C_1 \right),$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

Comme discuté au cours, C_1 représente l'invariance par translation des solutions qui est due au fait que l'équation de départ est autonome.

Exercice 3. (Equations indépendantes de y)

On pose $y'(x) = u(x)$ avec u la nouvelle fonction inconnue pour laquelle on a l'équation du premier ordre

$$u' - \frac{x}{1+x^2} (u^2 + 1) = 0.$$

Par séparation des variables on obtient

$$\arctan(u) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$ et donc

$$u(x) = \tan\left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C\right)$$

sur tout intervalle ouvert $I \subset D$, où

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \pm \sqrt{e^{-2C} e^{(2n+1)\pi} - 1}, n \in \mathbb{Z}, n \geq \frac{C}{\pi} - \frac{1}{2} \right\}.$$

La solution générale est l'union des ensembles des primitives de u sur chacun des intervalles ouverts maximaux de D .

Exercice 4. (Équations indépendantes de x et y)*i)* Solution paramétrique

On pose $y' = u$ et on obtient l'équation $u' - u^2 - 1 = 0$ et donc par séparation des variables

$$\begin{aligned} x &= \arctan(u) + C_1 \\ y &= \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C_2 \end{aligned}$$

avec $u \in \mathbb{R}$ utilisé comme paramètre.

ii) Comme équation indépendante de x

On pose $y'(x) = u(y(x))$, avec $u(t)$ la nouvelle fonction inconnue. On obtient l'équation

$$u'u - u^2 - 1 = 0,$$

et par séparation des variables, $\forall C \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2} \ln(1+u(t)^2) = t + C, \quad t \in]-C, +\infty[,$$

et en isolant $u(t)$, $\forall C \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = \pm \sqrt{e^{2t+2C} - 1}, \quad t \in]-C, +\infty[.$$

Finalement on doit résoudre les équations

$$y'(x) = u(y(x)) = \pm \sqrt{e^{2y+2C} - 1},$$

et par séparation des variables on trouve, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

$$\arctan\left(\sqrt{e^{2y(x)+2C_1} - 1}\right) = \pm x + C_2$$

et en isolant $y(x)$ de l'équation $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (le \pm disparaît avec le carré),

$$y(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + (\tan(x + C_2))^2) + C_1,$$

avec $x \in]-\frac{\pi}{2} + n\pi - C_2, \frac{\pi}{2} + n\pi - C_2[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ arbitraire.

iii) Comme équation indépendante de y

On pose $y'(x) = u(x)$ et on obtient l'équation

$$u' - u^2 - 1 = 0$$

et donc par séparation des variables $\forall C_1 \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(u(x)) = x + C_1$$

et donc $\forall C_1 \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \tan(x + C_1)$$

et donc l'équation

$$y'(x) = \tan(x + C_1),$$

et par intégration, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = -\ln(|\cos(x + C_1)|) + C_2,$$

avec $x \in]-\frac{\pi}{2} + n\pi - C_1, \frac{\pi}{2} + n\pi - C_1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ arbitraire.