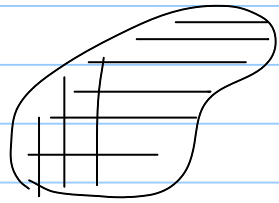
4.5.7. Deuxièmes dérivées partielles

Définition : soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, et supposons que les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$



existent. Pour chacune de ces fonctions on peut alors étudier l'existence des dérivées partielles par rapport à x et y en $(x_0,y_0) \in D$ (calcul des limites). Si les nombres

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}(x_0,y_0)$$

existent pour tout $(x_0,y_0) \in D$ on peut définir les fonctions deuxièmes dérivées partielles, notées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

par

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

Remarque: souvent on écrit directement $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$ au lieu de $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(x_0,y_0)$ pour la valeur de la dérivée partielle de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x en (x_0,y_0), etc.

Notations équivalentes (pour les fonctions deuxièmes dérivées partielles)

$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$, $\partial_x^2 f$, f''_{xx}, f_{xx}, $D_{xx}f$, etc.

Attention: l'interprétation de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ varie d'un auteur à l'autre. L'ordre des dérivées (pour nous d'abord par rapport à y puis par rapport à x) peut être échangé (voir par exemple dans Dz).

Heureusement: pour des fonctions de classe C^2 (à définir) on a que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$. Voir la série 6A pour un contre-exemple !

4.5.8. Dérivées partielles du deuxième ordre (n général)

Définition soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert et supposons que les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) \qquad , j = 1, \dots, n,$$

existent. Alors les fonctions des deuxièmes dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont définies en $\underline{x}_0 \in D$ par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0) \equiv \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_j}}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$$

$$:= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0 + h \cdot e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)}{h}$$

pour $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$.

Remarque: les deuxièmes dérivées partielles sont souvent arrangées dans un tableau (une matrice $n \times n$):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

qui est appelée la matrice hessienne de f en x_0: $Hess(f)(\underline{x}_0)$.

Remarque: $Hess(f)(\underline{x}_0)$ peut être la transposée de cette matrice selon les auteurs.

Remarque: si f est suffisamment régulière (de classe C^2, voir plus loin) on a

$$Hess(f)(x_0) = Hess(f)(\underline{x}_0)^T$$

c.-à-d. la matrice est symétrique

4.5.9. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Par récurrence on peut définir des (fonctions) dérivées partielles de tout ordre.

<u>Exemple:</u> (ordre 3, une fonction de $n=2$ variables).

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) \equiv \frac{\partial \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$:= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+h, y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{h}.$$

> <u>Remarque:</u> les fonctions rationnelles possèdent des dérivées partielles de tout ordre sur leur domaine de définition, et on a les règles de calcul habituelles pour les dérivées.

4.5.10. Exemples

1) $f(x,y) = x^3 y^2$ $\qquad (f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R})$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2 y.$$

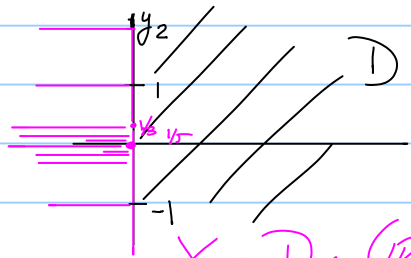
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = \boxed{12xy} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \boxed{12xy.}$$

2) $f(x,y) = x^y$ $\quad , \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ouvert $\subset X$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \cdot \ln(x)$$

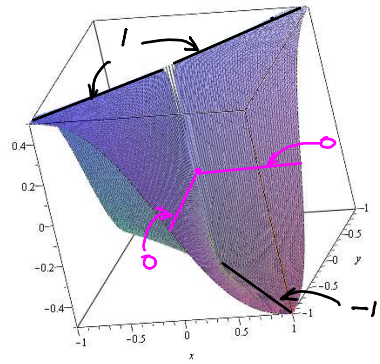


$D = \mathring{X}$

$X = D \cup (\mathbb{R} \times \{0, \pm 1, \ldots \pm \tfrac{1}{3}, \ldots\})$

3)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2\cdot xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>f n'est pas continue en $(0,0)$ ∇</u>



car par exemple
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0),$$

<u>néanmoins les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur tout $\mathbb{R}^2$:</u>

<u>i) pour $(x,y)\neq(0,0)$ f est donnée par une fonction rationnelle</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2x\cdot y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2x\cdot y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

<u>ii) pour $(x,y)=(0,0)$ il faut utiliser les définitions</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\cdot h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\cdot 0\cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$$

<u>Constat</u>: les dérivées partielles peuvent donc exister même en un point où f n'est pas continue

4.6. Fonctions différentiables

4.6.1. Rappels ($n=1$, Analyse I)

Définition de la dérivabilité et de la différentiabilité pour une fonction $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, en $x_0 \in I$:

Dérivable:

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \qquad (*)$$

existence de la limite $(*)$.

Différentiable:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + a \cdot h + \varepsilon(x_0+h) \cdot |h| \qquad (**)$$

existence d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(x_0+h) = 0$

Remarques:

$(**) \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ différentiable $\Rightarrow$ continue

$$(**) \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(a + \varepsilon(x_0+h) \frac{|h|}{h}\right) = a$$

donc $(**) \Rightarrow (*)$ avec $f'(x_0) = a$.

$$(**) \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h}{|h|} = \lim_{h \to 0} \varepsilon(x_0+h) = 0$$

4.6.2. Différentiabilité en un point

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, .., x_n)^T$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. La fonction f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$ s'il existe une matrice A ($1 \times n$) telle que

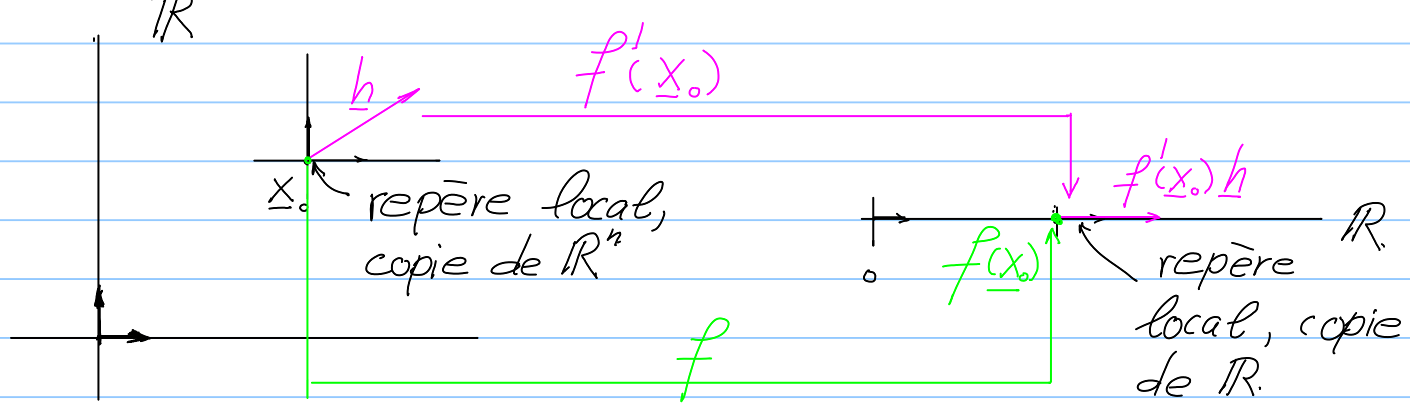
$$\left.\begin{array}{l} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{A \overset{\in \mathbb{R}^n}{\underline{h}}}_{\in \mathbb{R}} + \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) \, \|\underline{h}\| \\ \text{avec } \left(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et} \right) \lim\limits_{\underline{h} \to 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + \underline{h}) = 0. \end{array}\right\} (**)$$

Remarque: on peut réécrire $(**)$ d'une manière équivalente comme:

$$\left.\begin{array}{l} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + A(\underline{x} - \underline{x}_0) + \varepsilon(\underline{x}) \, \|(\underline{x} - \underline{x}_0)\| \\ \text{avec } \left(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \text{ et} \right) \lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \varepsilon(\underline{x}) = 0. \end{array}\right\} (**)^{bis}$$

Notation: on écrira $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ pour l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Notation: dans ce cours on écrira $f'(\underline{x}_0)$ pour l'application linéaire $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui correspond à la matrice A



Terminologie: l'application $f'(\underline{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est appelée la dérivée (totale) de f en $\underline{x}_0$

Remarque: $(**) \Longleftrightarrow$ existence d'une application linéaire $f'(\underline{x}_0)$ telle que

$$\lim_{\underline{h}\to 0} \underbrace{\frac{f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) - f'(\underline{x}_0)\underline{h}}{\|\underline{h}\|}}_{= \varepsilon(\underline{x}_0+\underline{h})} = 0$$

Notations: $\boxed{f'(\underline{x}_0)}$, $df(\underline{x}_0)$, $L_{\underline{x}_0}$ pour la dérivée en $\underline{x}_0$

Proposition 4.6 (différentiable $\Rightarrow$ continue et existence des dérivées partielles)

Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, f différentiable en $\underline{x}_0 \in D$. Alors

i) f est continue en $\underline{x}_0$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)$ existent pour $j = 1, \dots, n$.

iii) $f'(\underline{x}_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) \;\; \dots \;\; \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\right)$

les mêmes nombres que pour le gradient, mais ceci n'est pas le gradient, mais une matrice $1\times n$

Démonstration

i) $(**) \Rightarrow \lim_{\underline{h}\to 0} f(\underline{x}_0+\underline{h}) = \lim_{\underline{h}\to 0} \dots = f(\underline{x}_0)$

ii) et iii) on choisit $\underline{h} = h\cdot e_j$, $h \in \mathbb{R}$

$$(**) \Rightarrow f(\underline{x}_0 + h\cdot e_j) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{A(h\cdot e_j)}_{h\cdot(A e_j)} + \varepsilon(\underline{x}_0 + h e_j)|h|$$

par linéarité

$$\Longrightarrow \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h e_j) - f(\underline{x}_0)}{h}}_{= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \text{ par définition}} = A e_j + \underbrace{\lim_{h\to 0} \varepsilon(\underline{x}_0 + h e_j)\frac{|h|}{h}}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = A \cdot e_j = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{position } j \\ \\ \\ \\ \end{array} = A_j$$

Nota bene: l'exemple du paragraphe 4.5.10 montre que l'existence des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \quad , \; j = 1, \dots, n.$$

ne suffit pas pour garantir la differentiabilité en un point $\underline{x}_0$. Dans l'exemple les dérivées partielles existent, mais f n'est même pas continue.

Théorème. Toutes les fonctions rationnelles sont differentiables en tout point de leur domaine de définition.

Démonstration voir le théorème  plus loin