Peter Wittwer

Analyse avancée II – Série 6A

Échauffement. (Lignes et surfaces de niveau, gradient)

i) Soit la fonction $f(x,y) = x^2 - 2y$. Dessiner les lignes de niveau $f(x,y) = c$ pour $c = -2,\, 0,\, 2$ et représenter les gradients aux points $P = (-2,3)$, $Q = \big(1, \frac{1}{2}\big)$ et $R = (2,1)$.

ii) Construire une fonction $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que le graphe de f soit une surface de niveau de g. Exprimer toutes les surfaces de niveau de g comme graphe d'une fonction adéquate.

Exercice 1. (Fonctions dérivées partielles)

Préciser le domaine des fonctions f ci-dessous et calculer les fonctions dérivées partielles du premier et deuxième ordre :

i) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

ii) $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$

iii) $f(x,y) = \sin(x^2 y)\cosh(y-x)$

iv) $f(x,y,z) = \sinh\left(\dfrac{x+3yz}{z-2}\right)^2$

Exercice 2. (Deuxièmes dérivées partielles)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\,.$

Exercice 3. (QCM : limites, dérivées partielles)

Q1 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y\,\ln\Big(1 + (x^2+y^2)^2\Big)}{\exp\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,\big(x^2+y^2\big)^{\frac{5}{2}}}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$. Alors :

- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{4}$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas

Ex. 3 Q2 - 5 au verso.

Q2 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + x^2\, e^{\sin(y)}$. Alors la matrice Hessienne de f en (x,y) est :

☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big) & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & 2 \end{pmatrix}$ ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & -x^2\sin(y) \end{pmatrix}$

☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big) \end{pmatrix}$ ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\cos(y)^2 \end{pmatrix}$

Exercice 4. (Fonctions dérivées partielles)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$

iii) Est-ce que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(x,y) = (0,0)$?

Exercice 5. (Fonctions dérivées partielles)

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2)\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

iv) Discuter les fonctions dérivées partielles secondes de f.