Peter Wittwer

Analyse avancée II – Série 7A

Échauffement. (Plan tangent)

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = x^3y + x^2 + y^2$ au point $(1, 1, 3)$.

Exercice 1. (Dérivée)

Soient $g, h \colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, de classe C^1. Calculer les dérivées f' où

i) $f(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$

ii) $f(x, y) = g(x, y)\, h(x, y)$

iii) $f(x, y) = \dfrac{g(x, y)}{h(x, y)}$

Exercice 2. (Différentiabilité)

Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}\,, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\,, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Montrer que f est différentiable en tout $(x, y) \neq (0, 0)$.

iv) Montrer que f n'est pas différentiable en $(x, y) = (0, 0)$.

v) Est-ce que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(x, y) = (0, 0)$?

Exercice 3. (QCM, différentiabilité)

Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.
- ☐ les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
- ☐ f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, 0)$.

Ex. 4 - 7 au verso.

Exercice 4. (V/F : différentiabilité)

Q1 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0,y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

existent.

Q2 : Si une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 alors pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ .$$

Q3 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, et soit $(x_0,y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0\,.$$

Q4 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si f est différentiable en (x,y), alors

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0\,.$$

Q5 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h^2, y_0) - f(x_0,y_0)}{h^2}\ .$$

Exercice 5. (QCM, plan tangent)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \big(1-\cos(y)\big)\,\big(\sin(x)\big)^2$$

et soit le point $p = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Le plan tangent au graphe de f en $\big(p, f(p)\big)$ est donné par l'équation

- ☐ $z = -\frac{4}{\pi}\,x + \frac{2}{\pi}\,y$
- ☐ $z = \frac{2}{\pi}\,y - \frac{4}{\pi}\,x + 4$
- ☐ $z = \frac{2}{\pi}\,y + \frac{4}{\pi}\,x + 4$
- ☐ $z = -\frac{4}{\pi}\big(x - \frac{\pi}{2}\big) + \frac{2}{\pi}\,(y-\pi)$

Exercice 6. (Question ouverte)

Donner un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$, mais qui n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 7. (Question ouverte)

Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais qui n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.