

4.6.3. Méthodes A et B

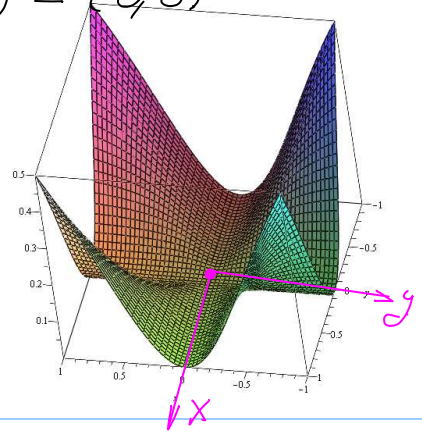
Comment contrôler la différentiabilité d'une fonction ?

A: méthode "directe" (utiliser la définition)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

En $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

f est différentiable car donnée par une fonction rationnelle



En $(x_0, y_0) = (0, 0)$

o) test facultatif: f est continue en $(0, 0)$ (c'est une condition nécessaire à la différentiabilité)
Pour $r > 0$ on a en coordonnées polaires

$$|f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) - f(0, 0)| \leq C r^2 \xrightarrow[r \rightarrow 0]{r > 0} 0 \quad (C=1 \text{ par exemple})$$

Attention! ∇ borne uniforme: $\exists C + \forall \varphi \Rightarrow \forall \varphi \exists C + \varphi$
= "non uniforme" ∇

i) calculer les dérivées partielles en $(0, 0)$ (leur existence est une condition nécessaire à la différentiabilité; voir la proposition 4.6 ∇)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0^2}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^2 \cdot h^2}{0^2 + h^2} - 0}{h} = 0$$

Donc, si f était différentiable en $(0,0)$ on aurait

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{matrice } 1 \times 2)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

ii) par définition (utiliser (xx) ^{bis} et proposition 4.6) si f est différentiable en $(0,0)$ on doit avoir

$$f(x,y) = f(0,0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y) \sqrt{x^2+y^2} \quad (*)$$

et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$. De (*) on obtient, pour

$$(x,y) \neq (0,0), \quad \varepsilon(x,y) = \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et en coordonnées polaires on trouve pour $r > 0$

$$\left| \varepsilon(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \right| \leq r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{r > 0} 0.$$

i) + ii) montrent la différentiabilité de f en $(0,0)$ ainsi que $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice 1×2).

B. par la méthode indirecte suivante

(utiliser le théorème suivant)

Théorème 😊 : soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$,
 $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.
Si les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad j=1, \dots, n$$

existent et sont toutes continues en $\underline{x}_0 \in D$, alors
 f est différentiable en $\underline{x}_0 \in D$

Dans notre exemple: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

On a déjà montré que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

et on a en coordonnées polaires

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| \leq 4r \xrightarrow[r>0]{r \rightarrow 0} 0$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| \leq 4r \xrightarrow[r>0]{r \rightarrow 0} 0$$

Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent donc sur \mathbb{R}^2 et
sont continues en $(0,0) \Rightarrow f$ différentiable en $(0,0)$ par 😊

Remarque: le théorème 😊 est un théorème "local".
 Soit $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subset D$, alors on peut restreindre f à $B(x_0, \delta)$ et on a le théorème sur $B(x_0, \delta)$. Il suffit donc que les fonctions dérivées partielles existent sur $B(x_0, \delta)$ et soient continues en x_0 .

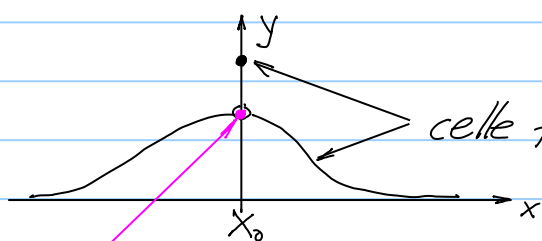
4.6.4. Démonstration du théorème 😊

Remarque: le théorème est sans aucun intérêt pour $n=1$. Ceci est dû au fait que pour simplifier la formulation les hypothèses sont choisies plus fortes que nécessaires.

INTERMEZZO

Théorème Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[\subset D$, $a < b$, f continue sur $]a, b[$, dérivable sur $]a, b[\setminus \{x_0\}$, et soit $l \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l$ (A) alors

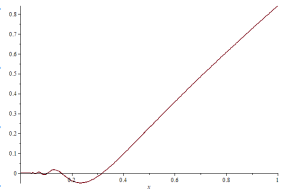
f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$ (B)



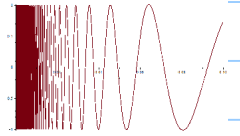
celle fonction n'est pas possible comme dérivée d'une fonction f

si c'est le graphe d'une fonction dérivée, la valeur en x_0 est là

Attention à la logique : dans l'exemple. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



f' n'admet pas de limite en $x_0 = 0$

Néanmoins f est dérivable en $x_0 = 0$. C'est un contre-exemple à la contra-posée de la réciprocque du théorème. $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$
 faux. $A \Rightarrow B$ vrai. faux par le contre-exemple.

Démonstration (théorème des accroissements finis)

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0 + \theta h) = l$$

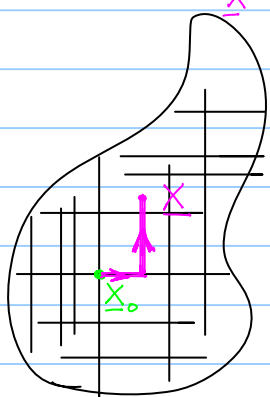
$\exists \theta = \theta(h) \in]0, 1[$ t.g.

INTERMEZZO

Démonstration du théorème 😊 (idée, une variable à la fois). Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ et $\underline{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$. Alors:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) &= \\ &= f(x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \\ &+ f(x_1, x_2, x_{0,3}, \dots, x_{0,n}) - f(x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \\ &\vdots \\ &+ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n}). \end{aligned}$$

" + 0 "



$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_{0,1} + \theta_1 (x_1 - x_{0,1}), x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) (x_1 - x_{0,1}) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_1, x_{0,2} + \theta_2 (x_2 - x_{0,2}), \dots, x_{0,n}) (x_2 - x_{0,2}) \\
&\quad \vdots \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_n} (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n} + \theta_n (x_n - x_{0,n})) (x_n - x_{0,n}).
\end{aligned}$$

avec $\theta_i \in]0, 1[$, $i=1 \dots n$, donnés par le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle (voir Analyse I). Ainsi (on veut calculer $\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$ de la "méthode A") :

$$f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = \begin{pmatrix} x_1 - x_{0,1} \\ \vdots \\ x_n - x_{0,n} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \text{ matrice } 1 \times n.$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} (x_{0,1} + \theta_1 (x_1 - x_{0,1}), x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) - \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \right] (x_1 - x_{0,1}). \quad [] \equiv \textcircled{1}$$

+ . . . +

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_n} (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{0,n} + \theta_n (x_n - x_{0,n})) - \frac{\partial f}{\partial x_n} (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \right] (x_n - x_{0,n}). \quad [] \equiv \textcircled{n}$$

et on obtien finalement pour la fonction $\varepsilon(x)$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|}$$

et donc, puisque $\frac{|x_i - x_{0,i}|}{\|x - x_0\|} \leq 1$, que

$$0 \leq |\varepsilon(x)| \leq |\textcircled{1}| + \dots + |\textcircled{n}| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

par la continuité des fonctions dérivées partielles en x_0 . (hypothèse du théorème 😊)

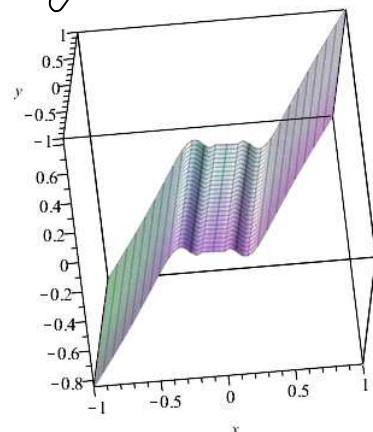
b Bémol

(contraposée de la)

Attention 😞 : la réciproque du théorème 😊 est fautive ! Le fait qu'une ou plusieurs des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ne soient pas continues en un point x_0 n'implique pas que la fonction n'est pas différentiable en x_0 .

(Contre-) exemple

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$



On montre que f est différentiable en $(0, 0)$ par la méthode A

$$i) \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$ii) (**)^{\text{bis}} \quad f(x, y) = 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En coordonnées polaires on obtient

$$\left| \varepsilon(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \right| \leq r \begin{matrix} r > 0 \\ r \rightarrow 0 \end{matrix} 0$$

On a donc démontré que f est différentiable en $(0,0)$

Par contre on obtient aucune information par le théorème 😊, car on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{pour } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et, puisque la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ n'existe pas

la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas (pourquoi?)

Conclusion:

↑
comparer avec Exercice 9.
de la série 5A

$\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ et le théorème 😊 ne s'applique pas. Ceci montre 😞 que la méthode directe montre que f est différentiable en $(0,0)$.

46.5. La différentielle (= fonction dérivée)

Définition: si f est différentiable sur D , c-à-d., si f est différentiable en tout point $\underline{x}_0 \in D$, on peut définir la fonction

$$f' : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ \underline{x} \longmapsto f'(\underline{x})$$

Cette fonction est appelée la différentielle de f

Notations: f' , df , ... pour la différentielle