4.7. Fonctions de classe C^k

Définition (en général) Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. Alors

$$f \in C^1(D) :\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}, \; j = 1, \dots, n$$

existent et sont continues sur D

$$f \in C^k(D) :\Leftrightarrow \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\ell_n}} \qquad \ell_1 + \dots + \ell_n = k, \quad \ell_i \in \{0, \dots, k\}$$

ainsi que les permutations

existent et sont continues sur D.

Exemple: $n = 2$, $k = 3$, $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$, $f(x,y)$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \; \underbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \; \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}}_{\text{"permutations"}}$$

Théorème: soit $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et soit f une fonction de classe C^k. Alors, les fonctions

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\ell_n}} \qquad \ell_1 + \dots + \ell_n = k, \quad \ell_i \in \{0, \dots, k\}$$

sont égales aux fonctions "avec les ∂x_i permutés"

Exemples: si $f(x,y)$ est de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{pas de permutations}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$ pas de permutations

et si $f(x,y)$ est de classe $C^3(\mathbb{R}^2)$ on a en plus

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}$$

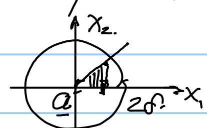
Ce théorème est une conséquence du théorème de Schwarz :

Théorème: soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et supposons que pour $i \neq j$ les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur D et sont continues en $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{a})$$

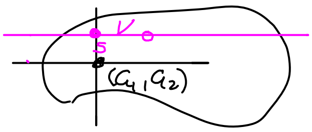
Démonstration

C'est un théorème local. On peut, pour $\delta > 0$ petit restraindre f à $B(\underline{a}, 2\delta) \subset D$.

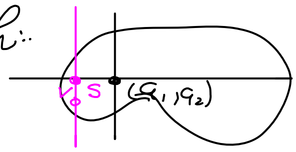


Soit $n=2$, $i=1$, $j=2$ et soit, pour $v \in [0, \delta]$ et $s \in [0, v]$

g:



h:



$$\left.\begin{cases} g(s) := f(a_1+v,\ a_2+s) - f(a_1,\ a_2+s), \\ h(s) := f(a_1+s,\ a_2+v) - f(a_1+s,\ a_2). \end{cases}\right\} (*)$$

Remarque:

$$\left.\begin{aligned} g(v)-g(0) &= f(a_1+v,\ a_2+v) - f(a_1,\ a_2+v) \\ &\quad - f(a_1+v,\ a_2) + f(a_1,\ a_2) = h(v)-h(0) \end{aligned}\right\} (**)$$

Pour $s \in]0, v[$ on a

$$\left.\begin{cases} g'(s) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+v,\ a_2+s) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\ a_2+s), \\ h'(s) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+s,\ a_2+v) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+s,\ a_2), \end{cases}\right\} (***)$$

En utilisant le théorème des accroissements finis (pour la variable v) on obtient dans $(***)$ qu'il existe $\theta_1, \theta_2 \in]0,1[$ tels que

$$\begin{cases} g'(s) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1+\theta_1 v,\ a_2+s)\, v, & (1) \\ h'(s) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1+s,\ a_2+\theta_2 v)\, v, & (2). \end{cases}$$

et de même qu'il existe $\theta_3, \theta_4 \in]0,1[$ tels que

1. $g(v)-g(0) = g'(\theta_3 v)\, v \underset{(1)}{=} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1+\theta_1 v,\ a_2+\theta_3 v)\, v^2$
2. $h(v)-h(0) = h'(\theta_4 v)\, v \underset{(2)}{=} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1+\theta_4 v,\ a_2+\theta_2 v)\, v^2$

et donc puisque par $(**)$ $g(v)-g(0) = h(v)-h(0)$ que

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1+\theta_1 v,\ a_2+\theta_3 v)}_{1} \underset{(*)}{=} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1+\theta_4 v,\ a_2+\theta_2 v)}_{2}$$

En utilisant la continuité des fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ en (a_1, a_2) on obtient, lorsque v tend vers zéro, que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) .$$

ceci termine la démonstration pour $n=2$. Si $n \geq 3$, $i<j$ on applique le même argument à la fonction $f(a_1 \dots a_{i-1}, x_i, a_i, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1} \dots a_n)$. $\square$

La généralisation du théorème de Schwarz aux dérivées partielles d'ordre plus élevé s'obtient par récurrence.

4.8. Le plan tangent ($n=2$)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert. Si f est différentiable en $(x_0,y_0) \in D$ on a pour (x,y) proche de (x_0,y_0) :

$$\underbrace{f(x,y)}_{\equiv z} = f(x_0 + \underbrace{(x-x_0)}_{\equiv h}, y_0 + \underbrace{(y-y_0)}_{\equiv k})$$

$$= f(x_0,y_0) + A\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \varepsilon(\underbrace{x_0+h}_{\equiv x}, \underbrace{y_0+k}_{\equiv y}) \overbrace{\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|}^{\sqrt{h^2+k^2}} = \dots$$

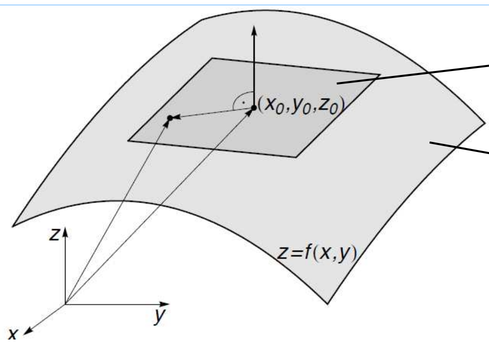
⌜ A est la matrice de l'application linéaire $f'(x_0,y_0)$ dans les coordonnées données

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right)$$ ⌟

$$\dots = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\equiv c \equiv z_0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\equiv a} h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\equiv b} k + \text{"petit"}$$

donc $\underbrace{z = c + a(x-x_0) + b(y-y_0)}_{\Longleftrightarrow} + \text{"petit"}$

$$z = (c - ax_0 - by_0) + ax + by$$ (l'équation d'un plan)



graphe du plan

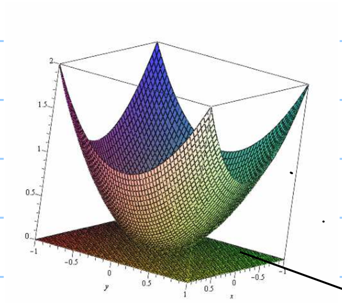
graphe de f

Ce plan est tangent au graphe de f en (x_0, y_0, z_0), où $z_0 = f(x_0,y_0)$

Conclusion: différentiable $\Longleftrightarrow$ existence d'un plan tangent

<u>Remarque</u>: on a la même conclusion pour $n>2$ avec le plan remplacé par un "hyper-plan" = graphe d'une fonction affine de n variables. Pour $n=1$ on obtient comme graphe une droite.

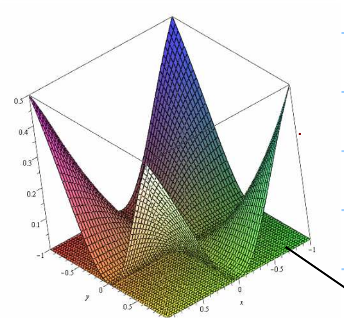
<u>Exemples</u>



$$f(x,y) = x^2+y^2 \quad , \quad (x_0,y_0)=(0,0)$$

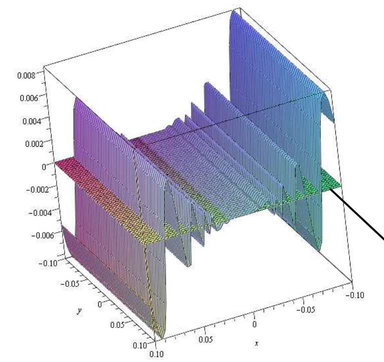
$$f(x,y) = 0 + \underbrace{(0,0)}_{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \text{"petit"}$$

$$z = 0 + 0\cdot x + 0\cdot y = 0$$



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

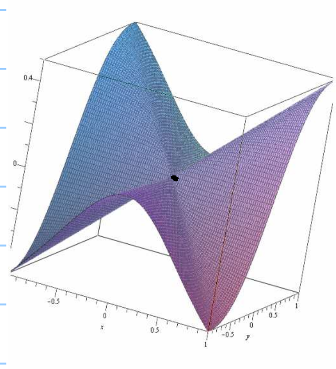
$z=0$ en $(x_0,y_0)=(0,0)$.



$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0, y\in\mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x=0, y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$z=0$ en $(x_0,y_0)=(0,y_0)$, $y_0\in\mathbb{R}$.

<u>Exemple d'une fonction continue mais pas différentiable</u>



(Exemple 4, section 4.4)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

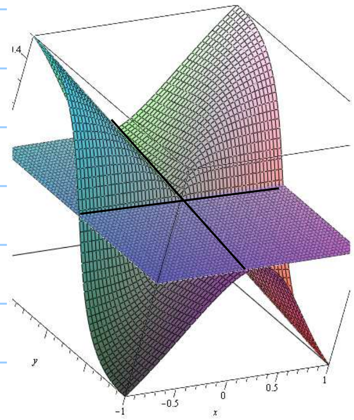
f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (voir la section 4.4)

f n'est pas différentiable en $(0,0)$

Méthode A

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^2\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{0^2\cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$



ii) de $f(x,y) = 0 + (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$

on trouve $\varepsilon(x,y) = \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

mais $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varepsilon(x,x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{2^{3/2}} \neq 0$

i) + ii) $z = 0$ n'est pas un plan tangent car f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4.9. Règles algébriques pour les dérivées des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Voir la série 7A

Soit $f, g : D \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables. (en un point ou sur D). Alors (en un point ou sur D) :

$$(f+g)' = f' + g'$$

à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$(f\cdot g)' = g\cdot f' + f\cdot g'$$

à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g} f' - \frac{f}{g^2} g'$$

5. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ $(n \geq 1, m \geq 1)$

5.1. Définitions

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \ldots, f_m(\underline{x}))^T$,
avec $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

<u>Remarque:</u> il suit de la définition de la continuité et de la proposition 2.6 que f est continue (en un point ou sur D), si et seulement si les fonctions f_i, $i = 1 \ldots m$, sont toutes continues (en un point ou sur D)

<u>Définition:</u> (differentiable).

Une fonction f est differentiable en $\underline{x}_0 \in D$, s'il existe une matrice A,

$$A = \begin{array}{c} \\ m \end{array}\!\!\overset{n}{\begin{bmatrix} \,|\; |\; |\; |\; |\, \end{bmatrix}} = (A_{ij}) \quad \text{matrice } m \times n$$

telle que

$$\left.\begin{aligned} & f(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{A \cdot \overset{\overset{\mathbb{R}^n}{\in}}{\underline{h}}}_{\in \mathbb{R}^m} + \varepsilon(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) \|\underline{h}\| \qquad \underline{h} \equiv (\underline{x} - \underline{x}_0) \\ & \text{avec } \big(\varepsilon(\underline{x}_0) = 0 \quad \text{et}\big) \lim_{\underline{h} \to 0} \varepsilon(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{h}}_{\equiv \underline{x}}) = 0 \in \mathbb{R}^m \end{aligned}\right\} (**)$$

<u>Remarque</u> $(**) \Longrightarrow$ continuité de f en $\underline{x}_0$ et

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(\underline{x}_0 + h \cdot e_j) - f_i(\underline{x}_0)}{h}$$

c.-à-d. existence de toutes les dérivées partielles