Peter Wittwer


# Analyse avancée II – Série 8A

**Échauffement.** (Dérivée en chaîne)

Calculer la dérivée de la fonction

$$f : ]1, \infty[ \mapsto \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) = \ln(t)^{\sin(t)}$$

*i*) par calcul direct

*ii*) en utilisant que $f(t) = (g \circ h)(t)$ avec $g(x, y) = x^y$ et $h(t) = (\ln(t), \sin(t))^T$.

**Exercice 1.** (Matrice jacobienne)

Soient les fonctions $F, G \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^1$. On note

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}, \qquad G(s,t) = \begin{pmatrix} G_1(s,t) \\ G_2(s,t) \end{pmatrix} \qquad \text{et}$$

$$\bar{F}(s,t) = F\big(G_1(s,t), G_2(s,t)\big) = (F \circ G)(s,t)\,.$$

Soient $J_F(x,y)$, $J_G(s,t)$ et $J_{\bar{F}}(s,t)$ les matrices jacobiennes de $F$, $G$ et $\bar{F}$. Montrer par un calcul explicite que

$$J_{\bar{F}}(s,t) = J_F\big(G(s,t)\big) \cdot J_G(s,t)\,,$$

où $\cdot$ est le produit matriciel.

**Exercice 2.** (QCM : dérivée en chaîne)

Soit

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto g(x,y,z) \end{aligned}$$

une fonction quelconque de classe $C^1$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} h \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto h(u,v) = \big(ve^{-2u},\, u^2e^{-v},\, u\big) \end{aligned}$$

et on définit $f = g \circ h$. Alors

- ☐ $\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(0,1,1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(1,0,1) + \frac{\partial g}{\partial z}(1,0,1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(0,1,1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\frac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$



Ex. 3 - 6 au verso.

**Exercice 3.** (V/F : dérivée en chaîne)

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe $C^1$. Soit $h = f \circ g$ et $p \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$J_h(p) = J_g\left(f(p)\right)\, J_f(p)\,.$$

**Exercice 4.** (Changement de coordonnées)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $H\colon D \to \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées inverse défini par $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$u = x^2 + 2y^2\,, \qquad v = \frac{y}{\sqrt{x}}\,.$$

*i*) Trouver le domaine $D$ et l'image $\tilde{D}$ de $H$. Calculer la transformation $G \equiv H^{-1}\colon \tilde{D} \to D$ ainsi que sa matrice jacobienne $J_G(u, v)$ et évaluer cette dernière en $(u, v) = H(x, y)$.

*ii*) Calculer $\big(J_H(x, y)\big)^{-1}$ et comparer avec le résultat de *i*).

**Exercice 5.** (Changement de coordonnées)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine convenable et soit $H\colon D \to \mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées inverse (bijectif de classe $C^1$ avec $G = H^{-1}$ de classe $C^1$) défini par $(u, v) = H(x, y) = \big(H_1(x, y), H_2(x, y)\big)$ avec

$$H_1(x, y) = \frac{y}{x + 2}\,, \qquad H_2(x, y) = \frac{x}{2y + 1}\,.$$

*i*) Calculer la matrice jacobienne $J_H(x, y)$ de cette transformation.

*ii*) On note $\tilde{D}$ l'image de $H$. Trouver la transformation $G \equiv H^{-1}\colon \tilde{D} \to D$ et calculer $J_G(u, v)$.

*iii*) Vérifier par calcul explicite que $J_G(u, v) = \big(J_H(x, y)\big)^{-1}\Big|_{(x,y)=G(u,v)}$.

**Exercice 6** (Laplacien)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe $C^2$ et soit la fonction $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \bar{f}(u, v)$, définie par

$$\bar{f}(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \qquad \text{où} \qquad \left\{\begin{array}{l} u = 2x - y \\ v = x + 3y \end{array}\right.\,.$$

Exprimer le laplacien $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ par rapport aux variables $u$ et $v$.