Peter Wittwer

Analyse avancée II – Corrigé de la série 8A

Échauffement.

i) On a que $f(t) = e^{\ln(\ln(t))\cdot\sin(t)}$ et donc

$$\begin{aligned}
f'(t) &= f(t)\cdot\left(\frac{1}{\ln(t)}\cdot\frac{1}{t}\cdot\sin(t) + \ln(\ln(t))\cdot\cos(t)\right)\\
&= \ln(t)^{\sin(t)}\frac{1}{\ln(t)}\cdot\frac{1}{t}\cdot\sin(t) + \ln(t)^{\sin(t)}\ln(\ln(t))\cdot\cos(t)\\
&= \ln(t)^{\sin(t)-1}\frac{1}{t}\cdot\sin(t) + \ln(t)^{\sin(t)}\ln(\ln(t))\cdot\cos(t)\ .
\end{aligned}$$

ii) Voir le chapitre 5.2.4 du cours.

Exercice 1.

Les matrices jacobiennes de F et G sont

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x F_1(x,y) & \partial_y F_1(x,y) \\ \partial_x F_2(x,y) & \partial_y F_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J_G(s,t) = \begin{pmatrix} \partial_s G_1(s,t) & \partial_t G_1(s,t) \\ \partial_s G_2(s,t) & \partial_t G_2(s,t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$J_F(G(s,t)) = \begin{pmatrix} (\partial_x F_1)(G(s,t)) & (\partial_y F_1)(G(s,t)) \\ (\partial_x F_2)(G(s,t)) & (\partial_y F_2)(G(s,t)) \end{pmatrix},$$

Le produit des deux matrices est donc (les arguments sont omis pour des raisons d'espace)

$$J_F(G(s,t))\cdot J_G(s,t) = \begin{pmatrix} \partial_x F_1\,\partial_s G_1 + \partial_y F_1\,\partial_s G_2 & \partial_x F_1\,\partial_t G_1 + \partial_y F_1\,\partial_t G_2 \\ \partial_x F_2\,\partial_s G_1 + \partial_y F_2\,\partial_s G_2 & \partial_x F_2\,\partial_t G_1 + \partial_y F_2\,\partial_t G_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

D'autre part la matrice jacobienne de $\bar{F}$ est

$$J_{\bar{F}}(s,t) = \begin{pmatrix} \partial_s \bar{F}_1(s,t) & \partial_t \bar{F}_1(s,t) \\ \partial_s \bar{F}_2(s,t) & \partial_t \bar{F}_2(s,t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

En notation courte on a

$$\partial_s \bar{F}_i(s,t) = \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial s} = \frac{\partial F_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad i = 1, 2,$$

avec $x(s,t) \equiv G_1(s,t)$ et $y(s,t) \equiv G_2(s,t)$, ce qui s'écrit proprement comme

$$\partial_s \bar{F}_i(s,t) = \partial_s(F_i \circ G)(s,t) = (\partial_x F_i)(G(s,t))\cdot(\partial_s G_1)(s,t) + (\partial_y F_i)(G(s,t))\cdot(\partial_s G_2)(s,t).$$

Les membres de droite de (2) et (1) sont bien égaux, c'est-à-dire

$$J_{\bar{F}}(s,t) = J_F\big(G(s,t)\big) \cdot J_G(s,t)\,.$$

Exercice 2.

Soit

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto g(x,y,z) \end{aligned}$$

une fonction quelconque de classe C^1. On considère la fonction

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto h(u,v) = \big(ve^{-2u},\, u^2e^{-v},\, u\big) \end{aligned}$$

et on définit $f = g \circ h$. Alors

- ☐ $\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(0,1,1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(1,0,1) + \frac{\partial g}{\partial z}(1,0,1)$
- ■ $\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\frac{\partial g}{\partial y}(0,1,1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\frac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$

La fonction f est définie par

$$f(u,v) = g\big(ve^{-2u}, u^2e^{-v},\, u\big)\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = {} & \frac{\partial g}{\partial x}\big(ve^{-2u}, u^2e^{-v},\, u\big) \cdot ve^{-2u} \cdot (-2) \\ & + \frac{\partial g}{\partial y}\big(ve^{-2u}, u^2e^{-v},\, u\big) \cdot 2ue^{-v} \\ & + \frac{\partial g}{\partial z}\big(ve^{-2u}, u^2e^{-v},\, u\big) \cdot 1 \end{aligned}$$

et comme $\Big[\,(ve^{-2u}, u^2e^{-v},\, u)\,\Big]_{(u,v)=(1,0)} = (0,1,1)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(1,0) &= \frac{\partial g}{\partial x}\,(0,1,1)\cdot 0 + \frac{\partial g}{\partial y}\,(0,1,1)\cdot 2 + \frac{\partial g}{\partial z}\,(0,1,1)\cdot 1 \\ &= 2\,\frac{\partial g}{\partial y}\,(0,1,1) + \frac{\partial g}{\partial z}\,(0,1,1)\,. \end{aligned}$$

Exercice 3.

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. Soit $h = f \circ g$ et $p \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$J_h(p) = J_g\,(f(p))\; J_f(p)\,.$$

☐ VRAI ■ FAUX

Non, pour $h = f \circ g$ on a
$$J_h(p) = J_f\big(g(p)\big)\, J_g(p)\,.$$

Exercice 4.

i) Le domaine de H est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Ainsi $u > 0$ parce que $x > 0$ et donc $\mathrm{Im}(H) = \tilde{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$, c.-à-d. $\tilde{D} = D$. Pour trouver la transformation $G \equiv H^{-1}$ on résout les équations de u et v pour x et y. On a $y = v\sqrt{x}$, d'où

$$u = x^2 + 2v^2 x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-2v^2 \pm \sqrt{4v^4 + 4u}}{2} = -v^2 \pm \sqrt{v^4 + u}\,.$$

Comme $x > 0$, il faut prendre la solution avec $+\sqrt{\ }$ et donc

$$(x, y) = G(u, v) = \left(-v^2 + \sqrt{v^4 + u}\,,\ v\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}\right).$$

Le dérivées partielles de G sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1}{\partial u} &= \frac{1}{2\sqrt{v^4 + u}} \\
\frac{\partial G_1}{\partial v} &= -2v + \frac{4v^3}{2\sqrt{v^4 + u}} = \frac{-2v\left(-v^2 + \sqrt{v^4 + u}\right)}{\sqrt{v^4 + u}} \\
\frac{\partial G_2}{\partial u} &= \frac{v}{4\sqrt{v^4 + u}\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \\
\frac{\partial G_2}{\partial v} &= \sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}} + \frac{v}{2\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}}\left(-2v + \frac{4v^3}{2\sqrt{v^4 + u}}\right) \\
&= \sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}} + \frac{-v^2\left(-v^2 + \sqrt{v^4 + u}\right)}{\sqrt{v^4 + u}\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \\
&= \frac{\left(-v^2 + \sqrt{v^4 + u}\right)^2}{\sqrt{v^4 + u}\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}}
\end{aligned}$$

La matrice jacobienne de G est alors

$$\begin{aligned}
J_G(u, v) &= \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u, v) & \partial_v G_1(u, v) \\ \partial_u G_2(u, v) & \partial_v G_2(u, v) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{v^4 + u}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2v\left(-v^2 + \sqrt{v^4 + u}\right) \\ \frac{v}{4\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} & \frac{\left(-v^2 + \sqrt{v^4 + u}\right)^2}{\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour évaluer en $(u, v) = H(x, y)$, observons que

$$\sqrt{v^4 + u} = \sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^4 + x^2 + 2y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{x^2} + x^2 + 2y^2} = \sqrt{\frac{(y^2 + x^2)^2}{x^2}} = \frac{y^2 + x^2}{x}$$

et donc

$$J_G\big(H(x, y)\big) = \frac{x}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2y\sqrt{x} \\ \frac{y}{4x} & x^{3/2} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

ii) La matrice jacobienne de H est

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x,y) & \partial_y H_1(x,y) \\ \partial_x H_2(x,y) & \partial_y H_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ -\frac{y}{2x^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix},$$

d'où

$$\big(J_H(x,y)\big)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{x} + \frac{2y^2}{x^{3/2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} & -4y \\ \frac{y}{2x^{3/2}} & 2x \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} x & -4yx^{3/2} \\ \frac{y}{2} & 2x^{5/2} \end{pmatrix},$$

ce qui est la même matrice qu'en (3).

Exercice 5.

i) La matrice jacobienne de H est

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x,y) & \partial_y H_1(x,y) \\ \partial_x H_2(x,y) & \partial_y H_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x+2)^2} & \frac{1}{x+2} \\ \frac{1}{2y+1} & -\frac{2x}{(2y+1)^2} \end{pmatrix}.$$

ii) Pour trouver la transformation $G \equiv H^{-1} \colon \tilde{D} \to D$, on utilise

$$v = \frac{x}{2y+1} \quad \Leftrightarrow \quad x = v(2y+1) \tag{4}$$

qu'on met dans l'expression donnée pour u

$$u = \frac{y}{x+2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{y}{v(2y+1)+2} \quad \Rightarrow \quad uv(2y+1) + 2u = y$$
$$\Rightarrow \quad uv + 2u = y(1-2uv) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{u(v+2)}{1-2uv}.$$

En remplaçant y dans l'équation de droite dans (4) par ce résultat, on trouve

$$x = \frac{2uv(v+2)}{1-2uv} + v = \frac{2uv(v+2) + v - 2uv^2}{1-2uv} = \frac{(4u+1)v}{1-2uv},$$

si bien que

$$G(u,v) = \left(\frac{(4u+1)v}{1-2uv}, \frac{u(v+2)}{1-2uv}\right) = \frac{1}{1-2uv}\Big((4u+1)v,\, u(v+2)\Big).$$

La matrice jacobienne de G est alors

$$\begin{aligned} J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u,v) & \partial_v G_1(u,v) \\ \partial_u G_2(u,v) & \partial_v G_2(u,v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2v(v+2)}{(1-2uv)^2} & \frac{4u+1}{(1-2uv)^2} \\ \frac{v+2}{(1-2uv)^2} & \frac{u(4u+1)}{(1-2uv)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-2uv)^2} \begin{pmatrix} 2v(v+2) & 4u+1 \\ v+2 & u(4u+1) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

iii) On commence par calculer l'inverse de $J_H(x,y)$. On a

$$\det\big(J_H(x,y)\big) = \frac{2xy}{(x+2)^2(2y+1)^2} - \frac{1}{(x+2)(2y+1)} = -\frac{x+4y+2}{(x+2)^2(2y+1)^2}$$

et donc

$$(J_H(x,y))^{-1} = \frac{(x+2)^2(2y+1)^2}{x+4y+2}\begin{pmatrix} \frac{2x}{(2y+1)^2} & \frac{1}{x+2} \\ \frac{1}{2y+1} & \frac{y}{(x+2)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x+4y+2}\begin{pmatrix} 2x(x+2)^2 & (x+2)(2y+1)^2 \\ (x+2)^2(2y+1) & y(2y+1)^2 \end{pmatrix}.$$

Afin d'évaluer $(J_H(x,y))^{-1}$ en $G(u,v)$, on commence par évaluer les quelques termes qui apparaissent souvent. Comme

$$x = \frac{(4u+1)v}{1-2uv} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{u(v+2)}{1-2uv}$$

par définition de G, on obtient

$$x+4y+2 = \frac{(4u+1)v+4u(v+2)+2-4uv}{1-2uv} = \frac{4uv+v+8u+2}{1-2uv} = \frac{(4u+1)(v+2)}{1-2uv}$$

$$x+2 = \frac{(4u+1)v+2-4uv}{1-2uv} = \frac{v+2}{1-2uv}$$

$$2y+1 = \frac{2u(v+2)+1-2uv}{1-2uv} = \frac{4u+1}{1-2uv}$$

et donc la matrice est

$$\left(J_H(x,y)\right)^{-1}\Big|_{(x,y)=G(u,v)} = \frac{1-2uv}{(4u+1)(v+2)}\begin{pmatrix} \frac{2(4u+1)v}{1-2uv}\left(\frac{v+2}{1-2uv}\right)^2 & \frac{v+2}{1-2uv}\left(\frac{4u+1}{1-2uv}\right)^2 \\ \left(\frac{v+2}{1-2uv}\right)^2\frac{4u+1}{1-2uv} & \frac{u(v+2)}{1-2uv}\left(\frac{4u+1}{1-2uv}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-2uv)^2}\begin{pmatrix} 2v(v+2) & 4u+1 \\ v+2 & u(4u+1) \end{pmatrix}$$

Une comparaison avec (5) montre qu'on a bien $\left(J_H(x,y)\right)^{-1}\Big|_{(x,y)=G(u,v)} = J_G(u,v)$.

Exercice 6.

On a $f(x,y) = \bar{f}\big(u(x,y), v(x,y)\big) = \bar{f}(2x-y, x+3y)$. En utilisant la formule pour la dérivation de fonctions composées du cours et la règle de la dérivée d'un produit, on a successivement

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Les dérivées analogues par rapport à y, c.-à-d. $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, sont obtenues en remplaçant x par y ci-dessus. En substituant

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

dans les expressions pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} \left(2 \, \frac{\partial u}{\partial x} \, \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \, \frac{\partial u}{\partial y} \, \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \\
&\quad + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&= 5 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} + 10 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2}
\end{aligned}$$