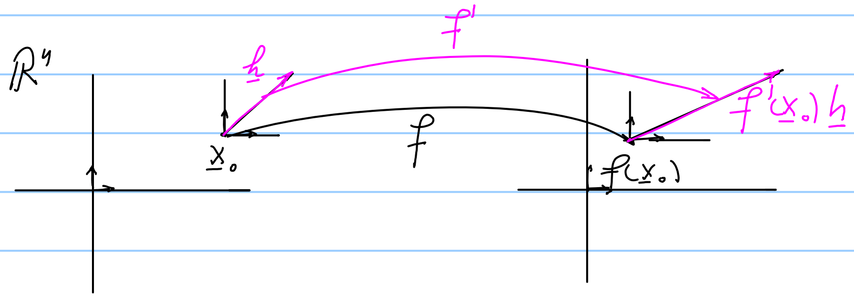
Notation: on écrira $f'(\underline{x}_0)$ pour l'application linéaire qui correspond à la matrice A



Terminologie: si f est différentiable en tout point $\underline{x}_0 \in D$, on peut définir la fonction

$$(df \equiv) \quad f' : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad (\hat{=}\ \mathbb{R}^{m\cdot n})$$
$$\underline{x} \longmapsto f'(\underline{x})$$

isomorphe

Cette fonction s'appelle la différentielle de f.

Terminologie: l'application linéaire $f'(\underline{x}_0)$ est appelée la dérivée (totale) de f en $\underline{x}_0$ ou encore (la valeur de) la différentielle de f en x_0

Remarque: $(**) \Longleftrightarrow$ (méthode A)

$$\lim_{\underline{h}\to 0} \underbrace{\frac{f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) - f'(\underline{x}_0)\underline{h}}{\|\underline{h}\|}}_{=\,\varepsilon(\underline{x}_0+\underline{h})} = 0$$

Attention: (terminologies, notations)

Souvent on trouve dans la litérature la notation

$$\boxed{J_f(\underline{x}_0)} \quad (= \text{matrice jacobienne de } f \text{ en } \underline{x}_0)$$

au lieu de $f'(\underline{x}_0)$ pour (la matrice de) la dérivée de f en $\underline{x}_0$. Nous utiliserons cette notation surtout pour le cas $n=m$ (changements de variables)

Remarque: en utilisant la définition (**) et la proposition 2.6 on voit que f est differentiable si et seulement si les fonctions f_i, $i=1\ldots m$ sont toutes differentiables.

Conséquence de cette remarque

Théorème: si les fonctions $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i=1\ldots m$, $j=1\ldots n$, sont toutes continues en $\underline{x}_0 \in D$, alors f est differentiable en $\underline{x}_0 \in D$

♭ même Bémol: la réciproque du théorème est fausse !

Définition: une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$,
$\underline{x} \longmapsto f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \ldots, f_m(\underline{x}))^T$,
$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert
est de classe $C^k \equiv C^k(D) \equiv C^k(D, \mathbb{R}^m)$,
si les fonctions $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i=1\ldots m$
sont toutes de classe C^k

Remarque (voir algèbre linéaire)

(1) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \xleftrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R} \ni a \qquad A = (a) \longleftrightarrow a.$

(2) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \xleftrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R}^m \ni \underline{a} \qquad \underbrace{A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\text{matrice}} \xleftrightarrow{\underline{a} = A(1)} \underbrace{\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\text{vecteur}}.$

(3) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \xleftrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R}^n \ni \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

(1) $\Downarrow$; $\Downarrow$ $\underline{h}$

avec le produit scalaire canonique

$$\forall \underline{h},\ A \cdot \underline{h} = (a_1 \ldots a_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i = \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle$$

Conséquence : les anciennes et nouvelles définitions coïncident

$n = m = 1$: $f'(x_0) = (a) \xleftrightarrow{(1)} f'(x_0) = a$ (Analyse I)

$n = 1, m > 1$: $\underbrace{f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix}}_{\text{matrice } m \times 1} \xleftrightarrow{(2)} f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix}$

le vecteur tangent défini en section 3

$n > 1, m = 1$: $f'(\underline{x}_0) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \right)}_{\text{matrice } 1 \times n} \xleftrightarrow{(3)} \nabla f(\underline{x}_0)$

le gradient en coordonnées cartésiennes

5.2. Dérivées des fonctions composées

5.2.1 Théorème (dérivation en chaîne)

<u>Théorème:</u> soit
$$D \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^\ell, \qquad f = g \circ h$$

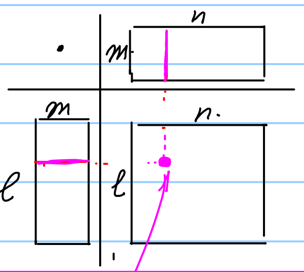
<u>Hypothèse:</u> $D \equiv D(h) \xrightarrow{h} h(D) \subset D(g)$, c-à-d la composition $f = g\circ h$ est bien définie et $D(f) = D$

Supposons que h et g sont de classe C^1 et $\underline{x}_0 \in D$

$h'(\underline{x}_0)$ = une matrice $m \times n$

$g'(h(\underline{x}_0))$ = une matrice $\ell \times m$

Alors $f = g\circ h$ est de classe C^1 et on a.



m termes

$$\boxed{\underbrace{f'(\underline{x}_0)}_{\ell \times n} = \underbrace{g'(h(\underline{x}_0))}_{\ell \times m} \cdot \underbrace{h'(\underline{x}_0)}_{m \times n}} \qquad (*)$$

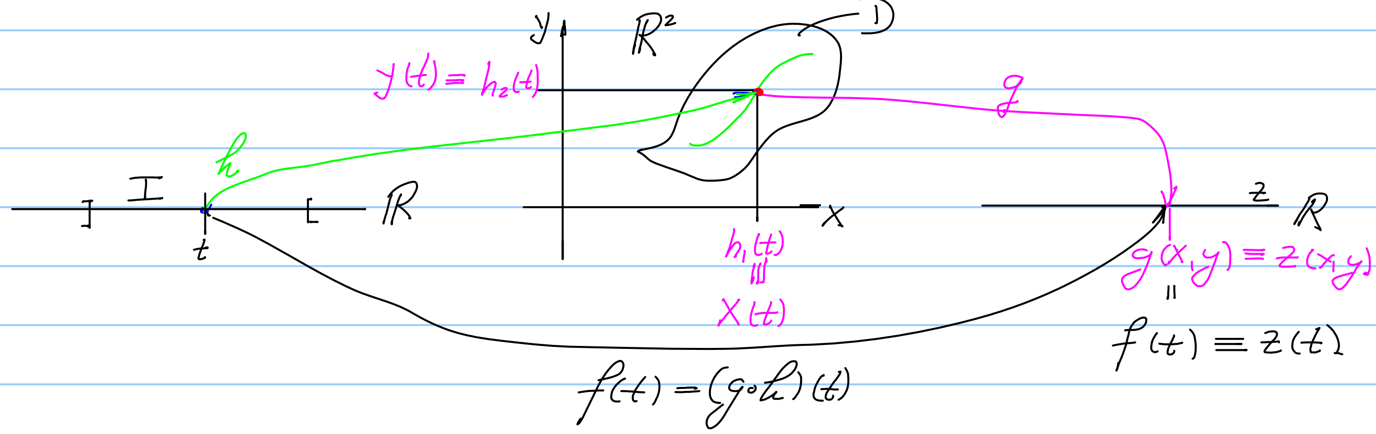
composition des applications linéaires
= multiplication des matrices

<u>Démonstration</u> voir Analyse I, 5.1.5, iv)

"mutatis mutandis"

5.2.2. Exemple $n=1$, $m=2$, $\ell=1$

Soit $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto g(x,y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, et $h: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto h(t) = (h_1(t), h_2(t))^T$, $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, tel que $h(t) \in D$ pour tout $t \in I$.



On peut considérer la fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) \equiv (g \circ h)(t) := g(h(t))$$

Supposons que g et h sont de classe C^1. Alors on a

$$f'(t) = (g' \circ h)(t) \cdot h'(t)$$

$$\boxed{f'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(h(t)) & \frac{\partial g}{\partial y}(h(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1'(t) \\ h_2'(t) \end{pmatrix}}$$

a priori on devrait écrire $\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t)\right)$ ou $\left(\frac{df}{dt}(t)\right)$
mais on utilise l'isomorphisme (notation Analyse I).

Si, par abus de notation, on écrit $h(t) \equiv \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ on obtient

$$f'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t)) & \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

et en effectuant la multiplication matricielle

$$f'(t) = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot x'(t)}_{\text{dérivée en chaîne par rapport à la première variable de } g} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t)}_{\text{dérivée en chaîne par rapport à la deuxième variable de } g.} \qquad (*)$$

Si on supprime les arguments de la notation (= "notation courte") on obtient

$$f' = \frac{\partial g}{\partial x}x' + \frac{\partial g}{\partial y}y'$$

ou avec la notation "d" au lieu de "'"

$$\boxed{df = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy.}$$

Finalement, avec l'identification $g(x,y) \equiv z(x,y)$ et $f(t) \equiv z(t)$, ceci donne

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy.$$

thermodynamique

5.2.3. Exemple $n=1$, $m=3$, $\ell=1$

Sous les mêmes hypothèses que pour 5.2.2 on a

$$g: D \longrightarrow \mathbb{R},\quad (x,y,z) \longmapsto g(x,y,z),\quad D \subset \mathbb{R}^3$$

$$h: I \longrightarrow D,\quad t \longmapsto (h_1(t), h_2(t), h_3(t))^T$$
$$\equiv (x(t), y(t), z(t))^T$$

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(t) = (g\circ h)(t) = g(x(t),y(t),z(t))$$

et $\quad f'(t) = g'(h(t))\cdot h'(t)$

$$\boxed{} \;=\; \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \;=\; \text{"trois termes"}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))\, z'(t) \end{aligned}$$

ou en notation courte :

$$\boxed{df = \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy + \frac{\partial g}{\partial z}\,dz}$$

5.2.4 Exemple $n=2$, $m=2$, $\ell=1$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend right, "f = g \circ h"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \quad (u,v) \qquad (x,y)$$

, g, h de classe C^1

$$g(x,y)\ , \quad h(u,v) \equiv \begin{pmatrix} h_1(u,v) \\ h_2(u,v) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

$$f(u,v) = (g \circ h)(u,v) = g(h(u,v))$$

$$f'(u,v) = (g' \circ h)(u,v) \cdot h'(u,v) \qquad \text{dérivée en chaîne}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = h'(u,v) \\ \hline g'(h(u,v)) = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} = g'(h(u,v)) \cdot h'(u,v) \end{array}$$

et en notation courte on a pour $f' = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial f}{\partial v}\right)$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.\\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

INTERMEZZO

Test de non-compréhension

Si on avait l'idée de multiplier dans $(*)$ la première ligne avec ∂u (ou la deuxième par ∂v) et si on simplifiait les ∂x et les ∂y, on obtiendrait

$$\partial f = \partial g + \partial g = 2\partial g \quad ??$$

Si un tel calcul vous semble à priori possible $\Longrightarrow$ retour à la case de départ (définition des fonctions dérivées partielles !)

Notation complète (ce que $(*)$ veut dire) :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x}(h_1(u,v), h_2(u,v))\cdot\frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial y}(h_1(u,v), h_2(u,v))\cdot\frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x}(h_1(u,v), h_2(u,v))\cdot\frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial y}(h_1(u,v), h_2(u,v))\cdot\frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v)$$

INTERMEZZO

5.2.5 Exemples explicites

1) Soit $f(t) = \ln(t)^{\sin(t)}$, $t>1$, $f'(t) = ?$

i) par calcul direct

$f'(t) = \dots$ voir la série 8A et analyse I

ii) $f(t) = (g \circ h)(t)$ avec

$$g(x,y) = x^y,\ x>0,\quad h(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},\ t>1.$$

$$g'(x,y) = \left(y\, x^{y-1} \quad x^y \cdot \ln(x) \right)$$

$$h'(t) = \left(\tfrac{1}{t} \quad \cos(t) \right)^T$$

$$f'(t) = (g' \circ h)(t) \cdot h'(t)$$

multiplication des matrices

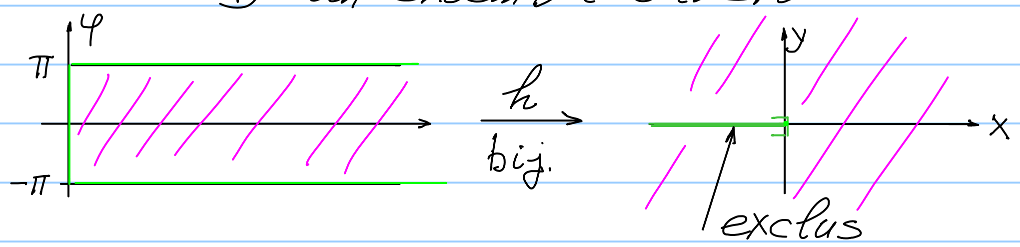
$$= \left(\sin(t)\ \ln(t)^{\sin(t)-1},\ \ln(t)^{\sin(t)} \cdot \ln(\ln(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$= \sin(t)\ \ln(t)^{\sin(t)-1} \cdot \frac{1}{t} + \ln(t)^{\sin(t)} \cdot \ln(\ln(t)) \cos(t)$$

2) $g(x,y) = x^2 + y^2$

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, le domaine est tout $\mathbb{R}^2$

$$h: \underbrace{]0,\infty[\times]-\pi,\pi[}_{=:D \text{ un ensemble ouvert}} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0]$$



$$x = r\cdot\cos(\varphi) \equiv x(r,\varphi) \equiv h_1(r,\varphi)$$
$$y = r\cdot\sin(\varphi) \equiv y(r,\varphi) \equiv h_2(r,\varphi).$$
coordonnées polaires

<u>Remarque</u> : h est une fonction bijective. On a

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \equiv r(x,y)$$

$$\varphi = 2\cdot\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \equiv \varphi(x,y)$$

Soit maintenant $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(r,\varphi) := (g\circ h)(r,\varphi) = g(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) = r^2$$

avec $h(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix}$

<u>i) calcul de f' en utilisant que $f(r,\varphi) = r^2$</u>

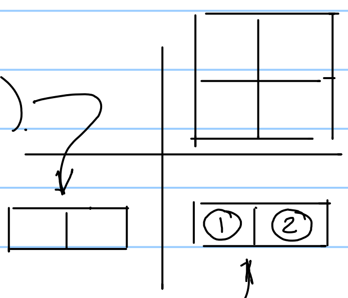
$$f'(r,\varphi) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi)\right) = (2r \quad 0)$$ (continues, donc f différentiable par ☺)

<u>ii) calcul de f' par dérivée en chaîne</u>

$$h'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \overset{\frac{\partial x}{\partial r}}{\cos(\varphi)} & \overset{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{-r\cdot\sin(\varphi)} \\ \overset{\frac{\partial y}{\partial r}}{\sin(\varphi)} & \overset{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{r\cdot\cos(\varphi)} \end{pmatrix}$$

$$g'(x,y) = (2x \quad 2y)$$

$$(g'\circ h)(r,\varphi) = (2\cdot r\cdot\cos(\varphi) \quad 2\cdot r\cdot\sin(\varphi)).$$



$$f'(r,\varphi) = (g'\circ h)(r,\varphi)\cdot h'(r,\varphi) =$$

① : $\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) = 2 \cdot r \cdot \cos(\varphi)\, \cos(\varphi) + 2r \cdot \sin(\varphi)\, \sin(\varphi) = 2r$

② : $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 2 \cdot r \cdot \cos(\varphi)\, (-r \cdot \sin(\varphi)) + 2 \cdot r \cdot \sin(\varphi)\, r \cdot \cos(\varphi) = 0$

iii) <u>même chose en notation courte</u>

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

"évalué en"

$$= 2x \cdot \cos(\varphi) + 2y \cdot \sin(\varphi) \Big|_{\substack{x = r\cdot\cos(\varphi) \\ y = r\cdot\sin(\varphi)}} = 2r.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$= 2x \cdot (-r \sin(\varphi)) + 2y \cdot r \cdot \cos(\varphi) \Big|_{\substack{x = r\cdot\cos(\varphi) \\ y = r\cdot\sin(\varphi)}} = 0$$