Théorème du point fixe

Le but est de résoudre des équations non linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$.
Le problème peut être formulé de la manière suivante:

- $g(x) = 0$ on cherche un zéro de g
- $f(x) = x$ on cherche un point fixe de f

En posant $f(x) = x + g(x)$ ou encore
$f(x) = x + A\,g(x)$ avec A une matrice $n \times n$, inversible on peut passer d'une formulation à l'autre.

Théorème (du point fixe)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D fermé,
une fonction telle que

a) $f(D) \subset D$

b) f est une contraction sur D,
c.-à-d., il existe $\alpha < 1$ tel que
$\forall x, y \in D$:

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \alpha \| x - y \| \qquad (*)$$

Alors, f possède un unique point fixe sur D

Remarque: la condition $(*)$ implique en particulier que la fonction f est (uniformément) continue sur D.

Démonstration

i) Unicité du point fixe.

Soient x et y deux points fixes, c.-à-d. $x, y \in D$, $x = f(x)$, $y = f(y)$. Alors.

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$$

et donc $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) Existence du point fixe.

Soit $x_0 \in D$ <u>arbitraire</u> et considérons la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, où pour $n \geq 1$:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

L'hypothèse que $f(D) \subset D$ implique que $\forall n$, $x_n \in D$.

Montrons que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy. On a que.

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-1}\| \ldots \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|$$

Pour $m > n$ on en déduit que.

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leq (\alpha^{m-1} + \ldots + \alpha^n) \|x_1 - x_0\| \\
&\leq \alpha^n (1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-n-1}) \|x_1 - x_0\| \\
&\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|
\end{aligned}$$

Par hypothèse $\alpha < 1$, et $\forall \varepsilon > 0$ il existe donc n_0 tel que

$$\frac{\alpha^{n_0}}{1-\alpha} \| x_1 - x_0 \| \leq \varepsilon$$

ce qui implique que $\forall \varepsilon$, $\exists\, n_0$ tel que $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$,

$$\| x_m - x_n \| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy.

Comme D est par hypothèse fermé on a que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in D$, et puisque f est continue sur D (voir la remarque) on a finalement

continuité de f.

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right)$$
$$= f(x^*),$$

c'est-à-dire x^* est un point fixe de f. $\blacksquare$

<u>Remarque</u>: la <u>démonstration</u> du théorème du point fixe est <u>constructive</u>:

i) on choisit $x_0 \in D$ arbitraire.

ii) on "itère f", c'est-à-dire on considère la suite (x_n), $x_n = f(x_{n-1})$ qui converge vers la solution du problème.