Peter Wittwer

Analyse avancée II – Série 9A

Échauffement. (Coordonnées sphériques)

i) Donner la fonction de changement de coordonnées G des coordonnées sphériques.

ii) Vérifier que $(x, y, z) = G(\rho, \theta, \varphi)$ se trouve sur la sphère de rayon ρ pour tout θ et φ.

iii) Calculer la matrice jacobienne J_G de G.

iv) Calculer le jacobien $\det(J_G)$ de G.

Exercice 1. (Laplacien en coordonnées sphériques)

Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Vérifier que le laplacien de F s'exprime comme suit en coordonnées sphériques :

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2}\right],$$

où $\bar{F}(\rho, \theta, \varphi) = (F \circ G)(\rho, \theta, \varphi)$ avec G de l'échauffement.

Exercice 2. (Dérivées d'intégrales avec paramètre)

Pour les fonctions $F\colon]1, \infty[\to \mathbb{R}$ définies ci-dessous, calculer la dérivée $F'(t)$.

i) $F(t) = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^t + \sin(x)}{\ln(x)}\, dx$

ii) $F(t) = \displaystyle\int_t^{t^2} \ln(x^2 + t^2)\, dx$

Exercice 3. (Dérivées d'intégrales avec paramètre)

i) Soit la fonction $F\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \displaystyle\int_{\sqrt{t}}^{1/t} \frac{\sin(\cos(tx))}{x}\, dx$. Calculer la dérivée $F'(t)$.

ii) Soit la fonction $F\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \displaystyle\int_1^{\sqrt[3]{t}} \frac{e^{tx^3}}{x}\, dx$. Calculer $F'(1)$.

Exercice 4. (V/F : dérivées d'intégrales avec un paramètre)

Q1 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$, une fonction de classe C^1 et soient $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors la fonction

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t)\, dx$$

est de classe C^1 et on a

$$F'(t) = f\big(b(t), t\big)\, b'(t) - f\big(a(t), t\big)\, a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx\,.$$

Ex. 5 - 9 au verso.

Exercice 5. (Fonctions implicites)

Vérifier que l'équation $F(x, y) = 0$ définit implicitement une fonction $y = f(x)$ dans un voisinage de 0 et calculer la dérivée $f'(0)$.

i) $F(x, y) = 2x^3 - x^2y^4 + 2y^3 + 3x - 2$

ii) $F(x, y) = xe^y + ye^x + 2$

Exercice 6. (QCM : fonctions implicites)

Q1 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$$

et on considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ implicitement définie par l'équation

$$f\big(x, y, g(x, y)\big) = 11\,.$$

Sachant que $g(1, 3) = -2$, on a

- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{12}{5}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{9}{2}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 11$

Exercic 7. (Plan tangent, voir la série 7)

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = x^3y + x^2 + y^2$ au point $(1, 1, 3)$.

Exercice 8. (Équation du plan tangent)

Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, l'équation $F(x, y, z) = 0$ définit alors localement une surface. Déduire l'équation du plan tangent à cette surface en (x_0, y_0, z_0) par l'expression vue au § 6.2.2 du cours.

Exercice 9. (Plan tangent)

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $xz^2 - 2x^2y + y^2z = 0$ aux points de la forme $(1, 1, z_0)$.