Analyse avancée II – Corrigé de la série 9A

Echauffement.

i) On a la fonction $G\colon \mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ avec

$$G(\rho,\theta,\varphi) = \big(G_1(\rho,\theta,\varphi), G_2(\rho,\theta,\varphi), G_3(\rho,\theta,\varphi)\big),$$

où

$$\begin{aligned} x &= G_1(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi),\\ y &= G_2(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi),\\ z &= G_3(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos(\theta). \end{aligned}$$

Cette fonction est surjective mais pas injective.

ii) On vérifie par un calcul direct que $x^2+y^2+z^2=\rho^2$. Ainsi les points (x,y,z) sont bien sur la sphère de rayon ρ.

iii) On restreint $G(\rho,\theta,\varphi)$ à l'ensemble ouvert $\widetilde{D} = \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times]0,2\pi[$. Sur cet ensemble G est injective et

$$G\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x\geq 0\big\}$$

est bijective. La matrice jacobienne de G est

$$J_G(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial G_1}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial G_1}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial G_2}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial G_2}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \dfrac{\partial G_3}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial G_3}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \dfrac{\partial G_3}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

iv) On vérifie que $\det(J_G)$ est

$$\begin{aligned} \det(J_G) &= \rho^2\left(\sin^3\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + \sin^3\theta\cos^2\varphi\right)\\ &= \rho^2\sin\theta\,. \end{aligned}$$

Exercice 1.

On se contente de vérifier la formule proposée plutôt que la retrouver parce que les calculs sont moins longs. On remarque d'abord que la formule donnée est équivalente à

$$\rho^2\Delta F = 2\rho\,\frac{\partial\bar F}{\partial\rho} + \rho^2\,\frac{\partial^2\bar F}{\partial\rho^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\,\frac{\partial\bar F}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\bar F}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin(\theta)^2}\,\frac{\partial^2\bar F}{\partial\varphi^2}\ , \tag{1}$$

et donc on va exprimer les éléments qui apparaissent à droite de (1) en fonction des dérivées partielles de F par rapport à x, y et z. Comme $\bar{F} = F \circ G$ avec G comme à l'Exercice 5, il faut dériver en chaîne. Pour simplifier on utilise la notation courte pour les composantes de $J_G(\rho,\theta,\varphi)$, c.-à-d. on écrit $\frac{\partial x}{\partial \rho}$ pour $\frac{\partial G_1}{\partial \rho}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$ pour $\frac{\partial G_2}{\partial \theta}$ etc.
Pour ρ on a :

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial F}{\partial x}\sin(\theta)\cos(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial y}\sin(\theta)\sin(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial z}\cos(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cdot\sin(\theta)\cos(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\cdot\sin(\theta)\sin(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\cdot\cos(\theta) \\
&= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)\sin(\theta)\cos(\varphi) + \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)\sin(\theta)\sin(\varphi) + \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)\cos(\theta) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\sin(\theta)^2\cos(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\sin(\theta)^2\sin(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cos(\theta)^2 + \\
&\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}2\sin(\theta)^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\varphi).
\end{aligned}$$

De même pour θ :

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial x}\rho\cos(\theta)\cos(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial y}\rho\cos(\theta)\sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial z}\rho\sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos(\theta)\right)\cdot\rho\cos(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cos(\theta)\right)\cdot\rho\sin(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\sin(\theta)\right)\cdot\rho \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cdot\cos(\theta) - \frac{\partial F}{\partial x}\sin(\theta)\right]\rho\cos(\varphi) + \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\cdot\cos(\theta) - \frac{\partial F}{\partial y}\sin(\theta)\right]\rho\sin(\varphi) \\
&\quad - \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\cdot\sin(\theta) + \frac{\partial F}{\partial z}\cos(\theta)\right]\rho \\
&= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\rho\cos(\theta)\cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial x}\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) + \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\rho\cos(\theta)\sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y}\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\rho\sin(\theta) - \frac{\partial F}{\partial z}\rho\cos(\theta) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\rho^2\cos(\theta)^2\cos(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\rho^2\cos(\theta)^2\sin(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\rho^2\sin(\theta)^2 + \\
&\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}2\rho^2\cos(\theta)^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi) - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\varphi) \\
&\quad - \frac{\partial F}{\partial x}\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y}\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial z}\rho\cos(\theta)
\end{aligned}$$

et pour φ :

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial F}{\partial x}\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial y}\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2} &= -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sin(\varphi)\right)\cdot \rho\sin(\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cos(\varphi)\right)\cdot \rho\sin(\theta) \\
&= -\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cdot\sin(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial x}\cos(\varphi)\right]\rho\sin(\theta) + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\cdot\cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y}\sin(\varphi)\right]\rho\sin(\theta) \\
&= -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial x}\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) + \\
&\quad\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y}\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\rho^2\sin(\theta)^2\sin(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\rho^2\sin(\theta)^2\cos(\varphi)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}2\rho^2\sin(\theta)^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \\
&\quad - \frac{\partial F}{\partial x}\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y}\rho\sin(\theta)\sin(\varphi)
\end{aligned}$$

Maintenant on peut remplacer les termes obtenues dans la partie droite de (1) qui est rappelée ci-dessous :

$$2\rho\frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \rho^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin(\theta)^2}\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2}\,. \tag{2}$$

Pour ne pas perdre la vue d'ensemble en regroupant les coefficients de chaque dérivée partielle de F, on fait un tableau qu'on remplit au fur et à mesure en évaluant les termes dans (2).

Terme	Coefficient	Résultat
$\frac{\partial F}{\partial x}$	$2\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) + \rho\frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)}\cos(\varphi) - \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) - \rho\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)}$	$= 0^*$
$\frac{\partial F}{\partial y}$	$2\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) + \rho\frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)}\sin(\varphi) - \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) - \rho\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)}$	$= 0^*$
$\frac{\partial F}{\partial z}$	$2\rho\cos(\theta) - \rho\cos(\theta) - \rho\cos(\theta)$	$= 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$	$\rho^2\sin(\theta)^2\cos(\varphi)^2 + \rho^2\cos(\theta)^2\cos(\varphi)^2 + \rho^2\sin(\varphi)^2$	$= \rho^2$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	$\rho^2\sin(\theta)^2\sin(\varphi)^2 + \rho^2\cos(\theta)^2\sin(\varphi)^2 + \rho^2\cos(\varphi)^2$	$= \rho^2$
$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$	$\rho^2\cos(\theta)^2 + \rho^2\sin(\theta)^2$	$= \rho^2$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$	$2\rho^2\sin(\theta)^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) + 2\rho^2\cos(\theta)^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) - 2\rho^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$	$= 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}$	$2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi) - 2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)$	$= 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}$	$2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\varphi) - 2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\varphi)$	$= 0$

*Pour simplifier les termes avec les fractions il faut mettre en évidence $\rho\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)}$ respectivement $\rho\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)}$.

Puisqu'on a obtenu que (2) est égal à $\rho^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) = \rho^2\Delta F$, on a bien démontré la formule pour le laplacien de F.

Exercice 2.

Les fonctions F données sont des intégrales dépendant d'un paramètre de la forme

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx\,.$$

Si les fonctions f, a et b sont de classe C^1, la dérivée de F est (cf. cours)

$$\frac{d}{dt}F(t) = f\big(b(t),t\big)\cdot b'(t) - f\big(a(t),t\big)\cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\,. \tag{3}$$

i) On a $f(x,t) = \frac{x^t+\sin(x)}{\ln(x)} \in C^1\big(\,]2,3[\times]1,\infty[\,\big)$, $a(t)=2$ et $b(t)=3$ avec $a,b\in C^1(\mathbb{R})$. Puisque les bornes sont constantes, le membre de droite de (3) consiste uniquement de l'intégrale et on a

$$F'(t) = \int_2^3 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^t+\sin(x)}{\ln(x)}\right)dx = \int_2^3 \frac{x^t\ln(x)}{\ln(x)}\,dx = \int_2^3 x^t\,dx = \left[\frac{x^{t+1}}{t+1}\right]_2^3 = \frac{3^{t+1}-2^{t+1}}{t+1}\,.$$

ii) On a $f(x,t) = \ln(x^2+t^2) \in C^1\big(]1,\infty[\times]1,\infty[\big)$, $a(t)=t$ et $b(t)=t^2$ avec $a,b\in C^1(\mathbb{R})$. Les bornes dépendent de t. On a

$$\begin{aligned}F'(t) &= \frac{d\,(t^2)}{dt}\cdot\ln\Big(\big(t^2\big)^2+t^2\Big) - \frac{d(t)}{dt}\cdot\ln\big(t^2+t^2\big) + \int_t^{t^2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\ln(x^2+t^2)\big)\,dx\\ &= 2t\ln\big(t^2\,(t^2+1)\big) - \ln\big(2t^2\big) + \int_t^{t^2}\frac{2t}{x^2+t^2}\,dx\,.\end{aligned}$$

Puisque $2t\displaystyle\int_t^{t^2}\frac{1}{x^2+t^2}\,dx = \left[\frac{2t}{t}\arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_t^{t^2} = 2\arctan(t)-\frac{\pi}{2}$, on a finalement

$$F'(t) = 2t\ln\big(t^2(t^2+1)\big) - \ln\big(2t^2\big) + 2\arctan(t) - \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercice 3.

Ces fonctions sont de nouveau de la forme (3).

i) Ici on a $f(x,t) = \frac{\sin(\cos(tx))}{x} \in C^1\big(\,]0,\infty[\times]0,\infty[\big)$, $a(t)=\sqrt{t}$ et $b(t)=\frac{1}{t}$ avec $a,b\in C^1(\,]0,\infty[)$. Ainsi

$$\begin{aligned}F'(t) &= \frac{\sin\big(\cos\big(t\frac{1}{t}\big)\big)}{\frac{1}{t}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{\sin(\cos(t\sqrt{t}))}{\sqrt{t}}\cdot\frac{d}{dt}\big(\sqrt{t}\,\big) + \int_{\sqrt{t}}^{1/t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin(\cos(tx))}{x}\right)dx\\ &= -\frac{\sin(\cos(1))}{t} - \frac{\sin(\cos(t^{3/2}))}{2t} + \int_{\sqrt{t}}^{1/t}\cos\left(\cos(tx)\right)\left(-\sin(tx)\right)dx\\ &= -\frac{\sin(\cos(1))}{t} - \frac{\sin(\cos(t^{3/2}))}{2t} + \left[\frac{\sin(\cos(tx))}{t}\right]_{\sqrt{t}}^{1/t} = -\frac{3\sin(\cos(t^{3/2}))}{2t}\,.\end{aligned}$$

ii) Pour $f(x,t) = \frac{e^{tx^3}}{x} \in C^1(\,]0,\infty[\times]0,\infty[\,)$, $a(t) = 1$ et $b(t) = \sqrt[3]{t}$ avec $a, b \in C^1(\,]0,\infty[\,)$, seulement la borne supérieure dépend de t si bien que le terme en $f(a(t),t)$ n'apparaît pas.

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \left.\frac{e^{tx^3}}{x}\right|_{x=\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sqrt[3]{t}\right) + \int_1^{\sqrt[3]{t}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{tx^3}}{x}\right) dx \\
&= \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{1}{3}\, t^{-2/3} + \int_1^{\sqrt[3]{t}} x^2 e^{tx^3}\, dx = \frac{1}{3}\frac{e^{t^2}}{t} + \left[\frac{1}{3t}\, e^{tx^3}\right]_1^{\sqrt[3]{t}} \\
&= \frac{1}{3t}\left(e^{t^2} - e^t\right) + \frac{1}{3}\frac{e^{t^2}}{t} = \frac{1}{3t}\left(2e^{t^2} - e^t\right),
\end{aligned}$$

et donc $F'(1) = \frac{1}{3}e$. En fait, puisque pour $t = 1$ l'intégrale s'anulle on a pas besoin de calculer ce terme et on a directement $F'(1) = \frac{1}{3}\left.\frac{e^{t^2}}{t}\right|_{t=1} = \frac{1}{3}e$.

Exercice 4.

Q1 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$, une fonction de classe C^1 et soient $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors la fonction

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\, dx$$

est de classe C^1 et on a

$$F'(t) = f\big(b(t),t\big)\, b'(t) - f\big(a(t),t\big)\, a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx\,.$$

Vrai, voir le cours.

Exercice 5.

i) Comme on veut utiliser le théorème des fonctions implicites, il faut vérifier que toutes ses hypothèses sont satisfaites. On commence par calculer les dérivées partielles de F. On a

$$F_x = \partial_x F = 6x^2 - 2xy^4 + 3 \qquad \text{et} \qquad F_y = \partial_y F = -4x^2y^3 + 6y^2\,,$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc F est de classe C^1. Comme on veut trouver une fonction définie au voisinage de 0, on pose $x_0 = 0$. L'équation $F(0, y_0) = 2y_0^3 - 2 = 0$ implique alors que $y_0 = 1$. De plus $F_y(0,1) = 6 \neq 0$.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui nous dit que l'équation $F(x,y) = 0$ définit une fonction implicite $y = f(x)$ dans un voisinage de 0 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $f(0) = 1$. De plus on a

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))} = \frac{6x^2 - 2xf(x)^4 + 3}{4x^2f(x)^3 - 6f(x)^2}$$

et ainsi $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Le graphe de la fonction f se trouve à la Fig. 1.

ii) Les dérivées partielles de F sont

$$F_x = e^y + y\, e^x \qquad \text{et} \qquad F_y = e^x + x\, e^y\,,$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc F est de classe C^1. On a de nouveau $x_0 = 0$ et $F(0, y_0) = y_0 + 2 = 0 \Rightarrow y_0 = -2$. Comme en plus, $F_y(0, -2) = 1 \neq 0$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Ainsi il existe une fonction $y = f(x)$ définie implicitement par l'équation $F(x, y) = 0$ dans un voisinage de 0 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $f(0) = -2$. De plus on a

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = -\frac{e^{f(x)} + f(x)e^x}{e^x + xe^{f(x)}} \ ,$$

et ainsi $f'(0) = 2 - \frac{1}{e^2} \approx 1.865$. Pour le graphe de f, voir Fig. 2.

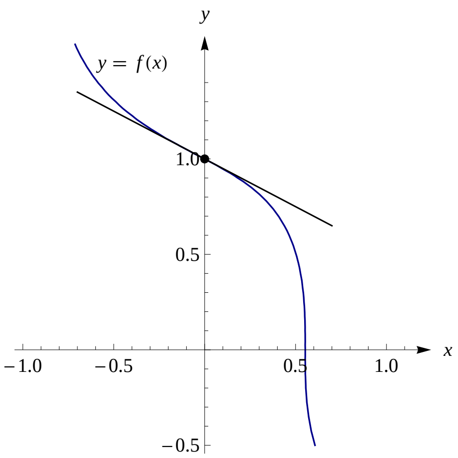

Figure 1

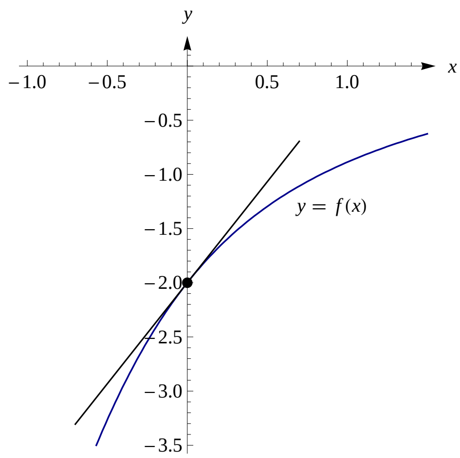

Figure 2

Exercice 6.

Q1 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$$

et on considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ implicitement définie par l'équation

$$f\big(x, y, g(x, y)\big) = 11 \, .$$

Sachant que $g(1, 3) = -2$, on a

- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{12}{5}$
- ■ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{9}{2}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 11$

En dérivant l'équation $f\big(x, y, g(x, y)\big) = 11$ par rapport à x on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, y, g(x, y)\big) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x, y, g(x, y)\big) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$$

et donc, puisque $g(1, 3) = -2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, -2) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, -2) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0 \, ,$$

d'où

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,3,-2)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,3,-2)} = \left[-\frac{-9yx^2}{6z^2-6y}\right]_{(x,y,z)=(1,3,-2)}$$
$$= -\frac{-27}{24-18} = \frac{9}{2}\,.$$

Exercice 7.

Soit $f(x,y) = x^3y + x^2 + y^2$. L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point (x_0, y_0, z_0), où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est (voir le cours)

$$z = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)\,.$$

Puisque $\partial_x f(x,y) = 3x^2y+2x$ et $\partial_y f(x,y) = x^3+2y$, l'équation s'écrit pour $(x_0,y_0) = (1,1)$:

$$z = 3 + 5(x-1) + 3(y-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x+3y-z = 5\,.$$

Exercice 8.

Par le théorème des fonctions implicites, l'équation $F(x,y,z) = 0$ définit localement une fonction $z = f(x,y)$ de classe C^1 telle que $F(x,y,f(x,y)) = 0$ et $z_0 = f(x_0,y_0)$. Comme f est différentiable car C^1, l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ est (voir § 4.2 du cours)

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)\,,$$

donc

$$(z-z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) = 0\,. \tag{4}$$

En utilisant les relations entre les dérivées partielles de f et F données par le théorème des fonctions implicites, (4) s'écrit

$$(z-z_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\,(x-x_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\,(y-y_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,(z-z_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,(y-y_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0\,,$$

où $\cdot$ dénote le produit scalaire. Comme cette dernière équation est vraie pour tout (x,y,z) proche de (x_0,y_0,z_0), le gradient de F en (x_0,y_0,z_0) est orthogonal au plan tangent en ce point.

Remarque: Formellement le gradient ∇f d'une fonction f est un vecteur colonne. Mais pour alléger la notation dans les corrigés, on l'écrit comme vecteur ligne.

Exercice 9. Soit $F(x,y,z) = xz^2 - 2x^2y + y^2z$. En évaluant F au point $(1,1,z_0)$ on a

$$F(1,1,z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0^2 - 2 + z_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = 1 \text{ ou } z_0 = -2\,.$$

Selon le cours sur les fonctions implicites, l'équation du plan tangent à la surface $F(x,y,z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) est

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \text{où} \quad \boldsymbol{r} = (x,y,z) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{r_0} = (x_0, y_0, z_0).$$

Puisque

$$\nabla F = (\partial_x F,\, \partial_y F,\, \partial_z F) = \left(z^2 - 4xy,\, -2x^2 + 2yz,\, 2xz + y^2\right)\,,$$

on a pour le point $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$

$$\nabla F(1,1,1) = (-3, 0, 3)$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3(x-1) + 0(y-1) + 3(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - z = 0\,.$$

Pour $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -2)$ on a

$$\nabla F(1,1,-2) = (0, -6, -3)$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0(x-1) - 6(y-1) - 3(z+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y + z = 0\,.$$