Théorème : si $G : \tilde{D} \longrightarrow D$, $\tilde{D}, D \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, est bijective avec G et $H = G^{-1}$ de classe C^1, alors $\det(J_G) \neq 0$ en tout point de $\tilde{D}$.
Réciproquement, si G est de classe C^1 et si, pour un point $\tilde{x}_0 \in \tilde{D}$, $\det(J_G(\tilde{x}_0)) \neq 0$, il existe un voisinage $\tilde{U}$ de $\tilde{x}_0$ et un voisinage U de $x_0 = G(\tilde{x}_0)$, tels que $G : \tilde{U} \longrightarrow U$ soit bijective, avec $H = G^{-1}$ de classe C^1

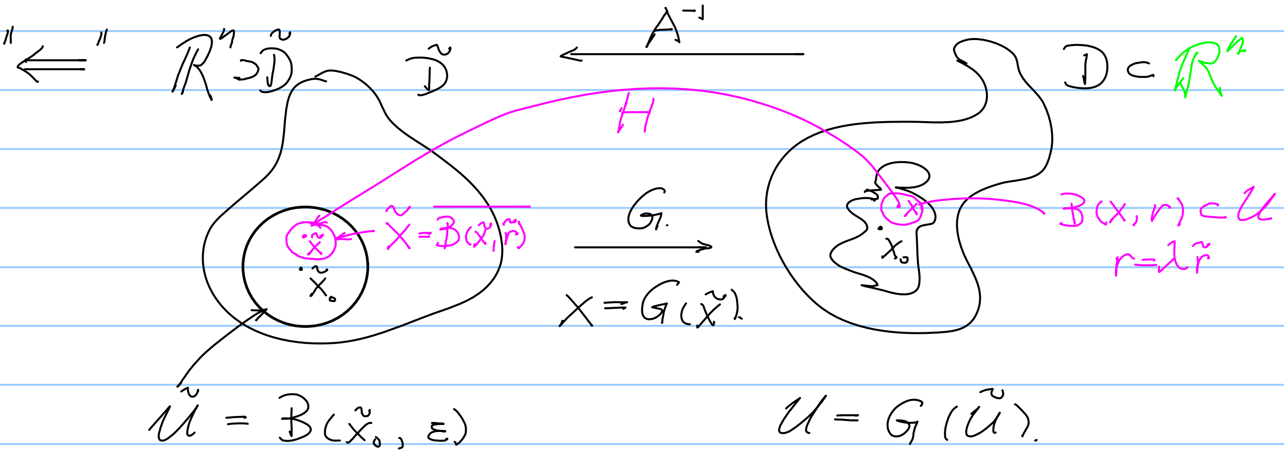
5.4.6. Idées pour la démonstration du théorème 5.4.3

"$\Longrightarrow$" en tout $\tilde{x}_0 \in \tilde{D}$ on a, pour $x_0 = G(\tilde{x}_0)$,

$$\mathcal{J}_G(\tilde{x}_0) \cdot \mathcal{J}_H(x_0) = \mathcal{J}_{id}.$$

$\mathcal{J}_G(\tilde{x}_0)$ est donc inversible et $\det(\mathcal{J}_G(\tilde{x}_0)) \neq 0$

"$\Longleftarrow$"



i) G est injective sur $\tilde{\mathcal{U}}$ ($H = G^{-1}$ existe)

ii) $\mathcal{U}$ est un ensemble ouvert

iii) $H = G^{-1}$ est differentiable

iv) $\mathcal{J}_H$ est continue car $\mathcal{J}_G$ est continue.

i) soit $A := \mathcal{J}_G(\tilde{x}_0) \equiv G'(\tilde{x}_0)$

donné $x \in \mathbb{R}^n$ on définit $\varphi : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\boxed{\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x} + A^{-1}(x - G(\tilde{x}))}$$

alors $x = G(\tilde{x}) \Longleftrightarrow \varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$

on a. $\varphi'(\tilde{x}) = 1 - A^{-1} G'(\tilde{x}) = A^{-1}(A - G'(\tilde{x}))$

on choisit ε tel que $\forall \tilde{x} \in \tilde{U} = B(\tilde{x}_0, \varepsilon)$

$$\|\varphi'(\tilde{x})\| \leq \|A^{-1}\| \, \|A - G'(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2} \text{ (ou plus petit)}$$

norme matricielle
(voir la série 8B)

G' est continue
donc $\lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} G'(\tilde{x}) = A$

$$\Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) \; (\forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{U})$$

$$\boxed{\|\varphi(\tilde{x}_1) - \varphi(\tilde{x}_2)\| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\|}$$

Donc si $\tilde{x}_1 = \varphi(\tilde{x}_1)$ et $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_2)$ alors $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$

ii). $\lambda := \frac{1}{2} \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. $x \in U$, $\tilde{x} = H(x) \Longleftrightarrow x = G(\tilde{x})$

on choisit $\tilde{r}$ t.q. $\overline{B(\tilde{x}, \tilde{r})} = \tilde{X} \subset \tilde{U}$

montrons que $\forall \xi \in B(x, \lambda r)$. il existe $\tilde{\xi} \in \tilde{X}$ tel que $\tilde{\xi} = \varphi(\tilde{\xi})$ où

$$\varphi(\tilde{\xi}) := \tilde{\xi} + A^{-1}(\xi - G(\tilde{\xi}))$$

on a $\|\varphi(\tilde{x}) - \tilde{x}\| \leq \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\leq \frac{1}{2\lambda}} \underbrace{\|\xi - \overset{\overset{G(\tilde{x})}{\|}}{x}\|}_{\leq \lambda \cdot r} \leq \frac{1}{2} r$, ainsi

le centre de la boule $\tilde{X}$
ne bouge pas trop

que $\forall \tilde{\xi} \in \tilde{X}$, $\|\varphi(\tilde{\xi}) - \tilde{x}\| \leq \|\varphi(\tilde{x}) - \tilde{x}\| + \|\varphi(\tilde{\xi}) - \varphi(\tilde{x})\|$
$\leq \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r$ (on reste dans la boule $\tilde{X}$)

Donc $\varphi : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ une contraction et il existe donc $\tilde{\xi} \in \tilde{X}$ t.q. $\xi = G(\tilde{\xi})$.

Donc $B(x, \lambda r) \subset U$ (donc U ouvert)

iii) Méthode A

5.5. Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre

(Application de la dérivée en chaîne)

<u>Proposition:</u> Soit

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx \qquad \boxed{\begin{array}{l} a, b \in C^1(\mathbb{R}) \\ f \in C^1(\mathbb{R}^2) \end{array}}$$

Alors

$$\left.\begin{array}{l} F'(t) = f(b(t),t)\,b'(t) - f(a(t),t)\,a'(t) \\ \qquad + \displaystyle\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \end{array}\right\} \quad (**)$$

<u>Remarque:</u> dans le cas particulier où $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$, $b(t) \equiv b \in \mathbb{R}$ sont des fonctions constantes on obtient de $(**)$:

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \qquad (*)$$

"dérivée sous l'intégrale"

<u>Idée de la démonstration de $(*)$</u> (voir série 9B)

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x,t+h)\,dx - \int_a^b f(x,t)\,dx \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^b \big(f(x,t+h) - f(x,t) \big)\,dx$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_a^b \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\,dx.$$

$$\overset{?}{=} \int_a^b \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}}_{=\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)} dx$$

oui pour $a,b \in \mathbb{R}$ ($a,b \neq \pm\infty$) et pour $\frac{\partial f}{\partial t}$ une fonction continue, car dans ce cas on a $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} \right| < \varepsilon$$

pour tout t donné et h suffisamment petit avec <u>h indépendant de $x \in [a,b]$.</u>

<u>Démonstration de (**)</u>

On pose $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(a,b,t) = \int_a^b f(x,t)\, dx$

$$= -\int_b^a f(x,t)\, dx$$

On a

$\frac{\partial g}{\partial b}(a,b,t) = f(b,t)$ Analyse I !, théorème fondamental du calcul intégral.

$\frac{\partial g}{\partial a}(a,b,t) = -f(a,t)$ ——— idem ———

$\frac{\partial g}{\partial t}(a,b,t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx$ par (*)

et donc, puisque $F(t) = g(\underbrace{a(t), b(t), t}_{h(t) \equiv (a(t),\, b(t),\, t)^T}) = g \circ h(t)$ on obtient:

$$F'(t) = g'(h(t)) \cdot h'(t)$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial a}(a(t), b(t), t) \quad \frac{\partial g}{\partial b}(a(t), b(t), t) \quad \frac{\partial g}{\partial t}(a(t), b(t), t) \right) \cdot \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

= "formule du théorème"

Généralisation aux intégrales généralisées

Proposition: soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, I un intervalle ouvert, $f \in C^1(]a, \infty[\times I)$

$$F(t) = \int_b^{+\infty} f(x,t)\,dx \quad \text{et} \quad \int_b^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

uniformement convergents. Alors, $F \in C^1(I)$ et

$$F'(t) = \int_b^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

Remarque: uniformement convergent veut dire, que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B_0 \geq b$, tel que $\forall B \geq B_0$, $\forall t \in I$:

$$\left| \int_B^{+\infty} f(x,t)\,dx \right| \leq \varepsilon$$

$\ulcorner$ On découpe l'intégrale "$\int_b^{+\infty} = \int_b^B + \int_B^{+\infty}$" et applique le théorème précédent sur $[b, B]$. Sur $[B, +\infty[$ les intégrales sont petites par hypothèse $\lrcorner$

Exemples

1) $F(t) = \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\sin(t \cdot x)}{x}}_{= f(x,t)} dx$, $F'(\frac{1}{4}) = ?$

$= f(x,t)$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, à vérifier!
(avec $f(0,t) = t$)

$$F'(t) = \int_0^{\pi} \frac{\cos(tx)\,x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{t} \sin(tx) \right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{t} \sin(\pi \cdot t)$$

$$F'(\tfrac{1}{4}) = 4 \cdot \sin(\pi \cdot \tfrac{1}{4}) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

2) $F(t) = \int_0^{t^2} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx$, $F'(\frac{1}{4}) = ?$

$$F'(t) = \frac{1}{t^2} \sin(t \cdot t^2) \cdot (2t) + \Big[\frac{1}{t} \sin(tx) \Big]_{x=0}^{x=t^2}$$

$$= \frac{2}{t} \sin(t^3) + \frac{1}{t} \sin(t^3) = \frac{3}{t} \sin(t^3)$$

$$F'(\tfrac{1}{4}) = 12 \cdot \sin(\tfrac{1}{64})$$

3) $F :]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx}\, dx$$

$f(x,t)$ du théorème.

$\ulcorner := \lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R e^{-tx} dx = \lim\limits_{R\to\infty} \Big[-\frac{1}{t} e^{-tx} \Big]_{x=0}^{x=R} =$
$\lim\limits_{R\to\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t} e^{-tR} \right) = \frac{1}{t}$. (voir Analyse I) $\lrcorner$

$\forall t \in]1, \infty[$, $x \in [0, \infty[$, $0 \leq e^{-tx} \leq e^{-x}$,
et donc, $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \int_B^\infty e^{-tx} dx \right| \leq \int_B^\infty e^{-x} dx = e^{-B} \leq \varepsilon$$

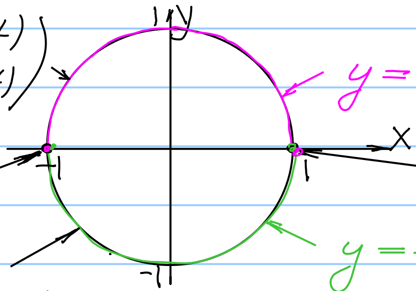
si $B \geq B_0 = \max\{0, -\ln(\varepsilon)\}$, et similaire pour $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = e^{-tx}(-x)$. Les deux intégrales sont donc uniformement convergentes et on obtient:

$$F'(t) = \int_0^\infty e^{-tx} (-x)\, dx \quad \ulcorner = \dots = -\frac{1}{t^2} \lrcorner .$$

6. Théorème des fonctions implicites

6.1. Introduction, théorèmes, exemples

trace de $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$



$y = \sqrt{1-x^2} \equiv f_1(x)$

$\frac{\partial F}{\partial y}(-1,0) = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 0$

$y = -\sqrt{1-x^2} \equiv f_2(x)$.

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

cercle: • ligne de niveau 0 de $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y) = x^2+y^2-1$

• union des graphes de $f_1, f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$

• trace de $g : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

f_1 et f_2 sont continues sur $[-1,1]$ et dérivables sur $]-1,1[$.

Question: comment définir f_1 et f_2 si on ne peut pas isoler y dans l'équation $F(x,y) = 0$?

Théorème des fonctions implicites: soit $D \subset \mathbb{R}^2$, ouvert, et $F : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y)$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\boxed{F(x_0, y_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0}$$

pour un $(x_0, y_0) \in D$. Alors l'équation $F(x,y) = 0$ définit localement (c.-à-d. pour x proche de x_0) une fonction $f(x)$ de classe C^1 telle que

$$\boxed{f(x_0) = y_0 \quad , \quad F(x, f(x)) = 0}$$

De plus

$$\boxed{f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}} \qquad (*)$$

Démonstration de $(*)$:

On a que $F(x, f(x)) = 0$ pour x proche de x_0, et donc

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) f'(x) = 0$$

De $(*)$ on trouve en particulier pour $x = x_0$ en utilisant que $f(x_0) = y_0$

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \qquad (**)$$

Remarque: $(**)$ explique aussi la condition

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Démonstration du théorèm : voir la demonstration du théorème general plus loin.

Dérivées d'ordre supérieur

De $(*)$ on trouve, pour F de classe C^2:

$$f''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,f(x))\cdot f'(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$$

$$+ \boxed{\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\right)^2}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,f(x))\cdot f'(x)\right)$$

$\| \\ -f'(x)$ par $(*)$.

et donc en particulier

$$f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot f'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot f'(x_0)^2}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

avec $f'(x_0)$ donné par $(**)$. On peut donc calculer $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ (et puis, pour F de classe C^k, récursivement $f^{(\ell)}(x_0)$, $\ell = 3, \dots, k$, et donc le développement limité de f en x_0), sans avoir besoin d'une expression explicite pour f.

Remarque: si $f'(x_0) = 0$ $\left(\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \text{ par } (**)\right)$ on a simplement

$$f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} \qquad (***)$$