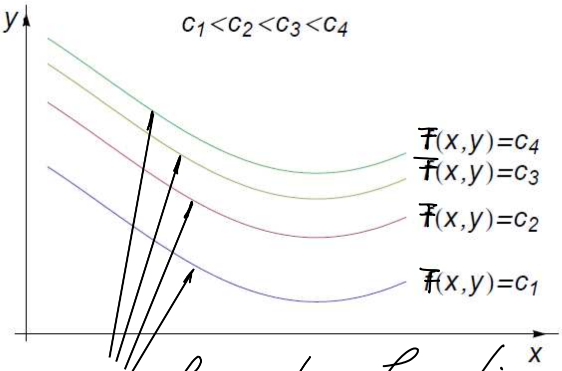
6.3. "Lignes" de niveau

($n=2$ à titre d'exemple, s'applique à $n \geq 2$)

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1



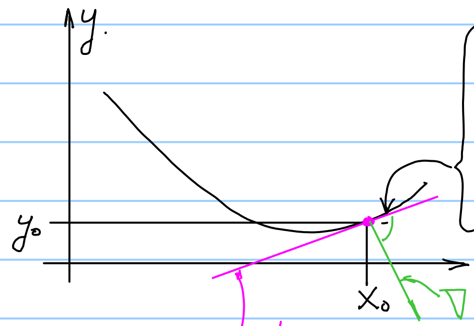
$\Leftrightarrow F_4(x,y)=0$ où $F_4(x,y)=F(x,y)-c_4$

$\vdots$

$\Leftrightarrow F_1(x,y)=0$ où $F_1(x,y)=F(x,y)-c_1$

$\Leftrightarrow$ graphes de fonctions f_i telles que $F_i(x, f_i(x))=0$

On a donc le schéma suivant:



$$\begin{cases} F(x,y) = c = F(x_0,y_0) \Leftrightarrow \\ F_c(x,y)=0 \text{ où } F_c(x,y)=F(x,y)-c \Leftrightarrow \\ \text{graphe de } f_c(x) \text{ où } F_c(x,f_c(x))=0 \end{cases}$$

$\nabla F_c(x_0,y_0) = \nabla F(x_0,y_0)$ (supposé $\neq 0$)

tangente au graphe de f_c en $(x_0, y_0=f_c(x_0))$

Equation de la tangente en (x_0,y_0):

$$y = y_0 + \underbrace{f_c'(x_0)}_{\shortparallel} (x-x_0) \qquad (*)$$

$$-\frac{\frac{\partial F_c}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F_c}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

car $F_c(x,y) = F(x,y) - c$

ou, en écriture implicite (en supposant $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$):

$$\Leftrightarrow \quad (y-y_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} (x-x_0) = 0$$

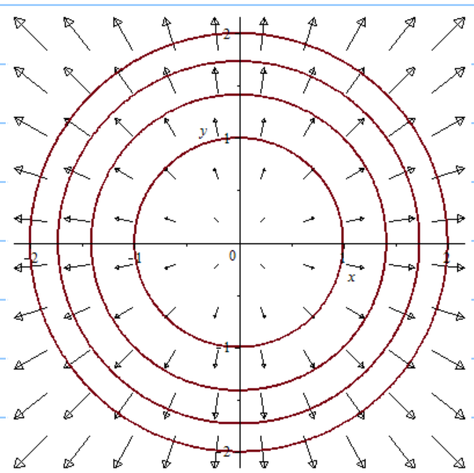
et en multipliant avec $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

$$\boxed{\left\langle (\nabla F)(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow (*).}$$

Conclusion: $(\nabla F)(x_0,y_0)$ est orthogonal à la tangente à la ligne de niveau de F passant par le point (x_0,y_0), c.-à-d. la ligne de niveau de F de niveau $c = F(x_0,y_0)$

Remarque: si $(\nabla F)(x_0,y_0) \neq 0$ alors ou bien $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites

Exemple:



$F(x,y) = x^2 + y^2.$

pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a.

$$\nabla F(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est un vecteur orthogonal à la tangente au cercle donné par $F(x,y) = c = F(x_0,y_0)$.

6.4 Théorème (des fonctions implicites)

Soient des ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ et $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1. Supposons qu'il existe $(x_0, y_0) \in U \times V$ tel que

$$\boxed{F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0.}$$

Notation : $\forall x \in U,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) := F_2'(y)$, où $F_2 : V \to \mathbb{R}^m$, $y \mapsto F(x,y)$

Alors :

i) il existe des voisinages $U_1 \subset U$ de x_0 et $V_1 \subset V$ de y_0 et une fonction $f : U_1 \longrightarrow V_1$ tel que

$$\boxed{\forall\, x, y \in U_1 \times V_1 \quad \big(F(x,y) = 0 \iff y = f(x) \big)}$$

ii) la fonction f est de classe C^1 et on a

$$\boxed{f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}$$

$F'(x,y) \sim m$, $n+m$; $F_1' \equiv \frac{\partial F}{\partial x}$; $\frac{\partial F}{\partial y} = F_2'$

$\forall y \in V,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) := F_1'(x)$, où $F_1 : U \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto F(x,y)$

$f' \sim$ m, m ; n, m ; m, n

$f : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U_1 \subset U \subset \mathbb{R}^n$

$f' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Idée de la démonstration

On définit la fonction

$$H : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$(x, y) \longmapsto (x, F(x,y)).$$

$$(\tilde{x},\ \overset{\shortparallel}{\tilde{y}})$$

et applique le théorème de la fonction réciproque (voir §5.4.2). La fonction H est de classe C^1 et

$$H'(x_0, y_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array}\right)$$

avec $\det(H'(x_0, y_0)) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$.

Vu que $H(x_0, y_0) = (x_0, F(x_0, y_0)) = (\overset{\tilde{x}_0}{\overset{\equiv}{x_0}}, \overset{\tilde{y}_0}{\overset{\equiv}{0}})$ il existe donc une fonction réciproque $G = H^{-1}$, définie dans un voisinage $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ de $\tilde{x}_0 \equiv x_0$ $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ de $\tilde{y}_0 = 0$ telle que $G(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = G(x_0, 0) = (x_0, y_0)$

$$\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{U} \times \tilde{V}, \quad (H \circ G)(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, \tilde{y}) \qquad (*)$$

et G est de classe C^1 sur $\tilde{U} \times \tilde{V}$.

Finalement, donné que

$$H(x, y) = (x, F(x, y))$$

on a que

$$G(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}))$$

avec $\Phi(\overset{\tilde{x}_0}{\overset{\equiv}{x_0}}, \overset{\tilde{y}_0}{\overset{\equiv}{0}}) = y_0$ et $(*)$ devient $\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{U} \times \tilde{V}$

$$(H \circ G)(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, F(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}))) = (\tilde{x}, \tilde{y})$$

et donc $F(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x}, \tilde{y})) = \tilde{y}$ et en particulier $\forall \tilde{x} \in \tilde{U}$; $F(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x}, 0)) = 0$. Soit $f(x) := \Phi(x, 0)$, alors

$$f(x_0) = y_0, \text{ et } \forall x \in U_1 = \tilde{U}, \quad F(x, f(x)) = 0.$$

7. La dérivée directionnelle

7.1. Définitions

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in D$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. Soit $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq 0$ et $\underline{x}_0 \in D$. Le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

est appelé la dérivée directionnelle unilatérale (ou dérivée directionnelle au sens de Dini) de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$, et le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

est appelé la dérivée directionnelle de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$

Remarque: soit $\underline{e} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \underline{v}$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0) = \|\underline{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{e}_+}(\underline{x}_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \|\underline{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0)$$

Démonstration:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ (t > 0)}} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} \underset{t = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot s}{=} \|\underline{v}\| \cdot \lim_{\substack{s \to 0 \\ (s > 0)}} \frac{f(\underline{x}_0 + \underline{e} \cdot s) - f(\underline{x}_0)}{s}$$

Remarque: pour $n=1$ la dérivée directionnelle unilatérale pour $\underline{e}=(1)$ est égale à la dérivée à droite et pour $\underline{e}=(-1)$ à moins la dérivée à gauche (vérifier !)

Remarque: pour $\underline{v}=\underline{e}=(0,..,0,\underset{\uparrow}{1},0...0)^T$ on a
position i

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$$

Remarque: si $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)$ existe, alors $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)$

Proposition: soit $g(t):=f(\underline{x}_0+t\,\underline{v})$. Alors

$$\left.\begin{aligned} g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)\\ g'(0+) &= \frac{\partial f}{\partial \underline{v}_+}(\underline{x}_0)\end{aligned}\right\}(*)$$

dérivée à droite en $t=0$.

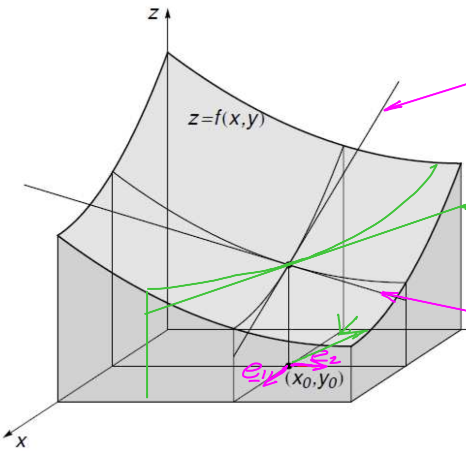
Démonstration:

$$g'(0):=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)}{t}$$

$$g'(0+):=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{g(t)-g(0)}{t}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)}{t}$$

Remarque: $(*)$ est une (bonne) manière de calculer la dérivée directionnelle (unilatérale)

Attention ! f n'est pas forcément différentiable en (x_0, y_0) (voir les exemples plus loin).



pente $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

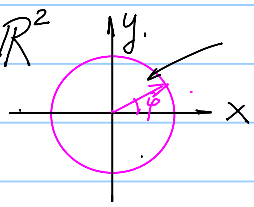
pente $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0, y_0)$, où $\underline{e} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$

pente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

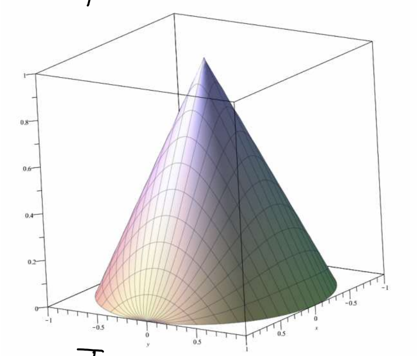
Exemple 1

Soit $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \in D = B(0,1)$

$\mathbb{R}^2$



$D = B(0,1)$



disque ouvert de rayon 1 centré en 0 (voir 2.3)

Soit $(x_0, y_0) = (0,0)$, et

$\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ (φ arbitraire mais fixe)

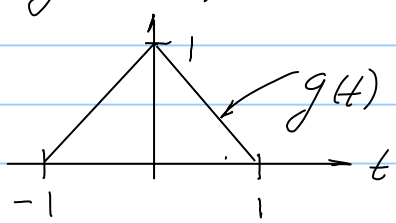
i) en utilisant les définitions

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t\cos(\varphi), 0+t\sin(\varphi)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-|t|-1}{t} \text{ n'existe pas.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}_+}(0,0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{f(0+t\cos(\varphi), 0+t\sin(\varphi)) - f(0,0)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{1-t-1}{t} = -1.$$

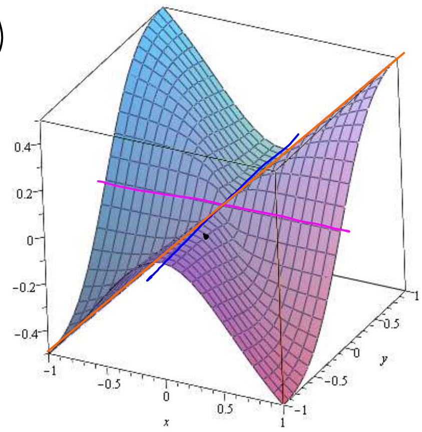
ii) avec la fonction $g(t)$

$$g(t) = f(0+t\cdot\cos(\varphi), 0+t\cdot\sin(\varphi)) = 1-|t|$$



$g'(0+) = -1$

$g'(0)$ n'existe pas



Exemple 2 (voir aussi 4.4 et 4.8)

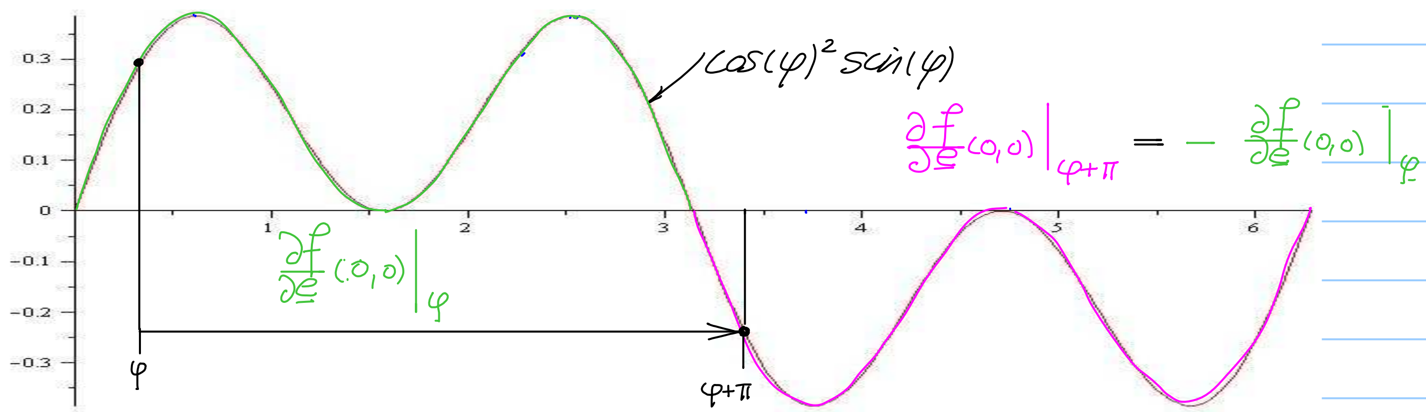
Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soit $(x_0,y_0) = (0,0)$ et $\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

en utilisant les définitions

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{t^2\cos(\varphi)^2 t\cdot\sin(\varphi)}{t^2} - 0}{t} = \cos(\varphi)^2 \cdot \sin(\varphi)$$



Remarque: si la dérivée directionnelle existe pour tout vecteur $\underline{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ on a nécessairement

$$\boxed{\forall \varphi \in [0,\pi[\quad \frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0,y_0)\Big|_{\varphi+\pi} = -\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(x_0,y_0)\Big|_{\varphi}}$$

Pour résumer l'exemple (voir aussi 4.4 et 4.8)

La fonction de l'exemple 2 est continue en $(0,0)$ et les dérivées partielles en $(0,0)$ existent. En fait la dérivée directionnelle existe suivant tout vecteur $\underline{v} \neq 0$, mais la fonction f n'est quand-même pas différentiable en $(0,0)$, elle n'admet pas de plan tangent en $(0,0)$.

7.2. Le cas d'une fonction différentiable

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert, <u>f différentiable en $(x_0,y_0) \in D$</u> et soit $\underline{v} = (v_1,v_2)^T$, $\underline{v} \neq 0$. Soit

$$g(t) = f(\underbrace{x_0 + t \cdot v_1 , y_0 + t\, v_2}_{\begin{array}{c}\parallel \\ h(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \end{pmatrix}\end{array}}) = (f \circ h)(t)$$

Puisque f est différentiable en (x_0,y_0) on a (dérivée en chaîne)

multiplication des matrices

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0) = g'(0) = \underbrace{f'(\underbrace{h(0)}_{=(x_0,y_0)})}_{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}} \cdot \underbrace{h'(0)}_{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}$$

$$= \langle \nabla f(x_0,y_0), \underline{v} \rangle$$

voir § 5.1
isomorphisme des espaces vectoriels

__Définition bis__ (cas où f est différentiable)
Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D ouvert, __f différentiable__ en $\underline{x}_0 \in D$, et soit $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq 0$. Le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) := \left\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)\, v_i$$

est appelé la dérivée directionnelle de f en $\underline{x}_0$ suivant le vecteur $\underline{v}$

__Remarque:__ cette définition est équivalente à la définition avec la limite __sous l'hypothèse que f soit différentiable.__

__Remarque:__ si f est différentiable on obtient aucune nouvelle information sur f

__Remarque:__ (cas f différentiable)
Soit $\underline{e}$ __un vecteur unité__ et supposons que $\nabla f(\underline{x}_0) \neq 0$

Alors $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0)$ est maximal si $\underline{e}$ et $\nabla f(\underline{x}_0)$ sont colinéaires c'est-à-dire pour

$$\underline{e} = \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}$$

car dans ce cas on a

$\le \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \underbrace{\|\underline{e}\|}_{=1}$ Cauchy-Schwarz

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}(\underline{x}_0) = \left\langle \nabla f(\underline{x}_0), \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|} \right\rangle = \frac{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|} = \|\nabla f(\underline{x}_0)\|$$

donc maximal pour des vecteurs colinéairs !