Analyse avancée II – Série 10A

Échauffement. (Dérivée directionnelle)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et soit $\boldsymbol{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ un vecteur unitaire. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(0,0)$.

Exercice 1. (Dérivée directionnelle, I)

Soient les fonctions $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (x-2y)^2 \ln(1+x^2+y^2) \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \frac{e^{2x(y+1)}}{3+x^2y^4}\,,$$

et soient le point $p_0 = (1,1)$ ainsi que le vecteur $\boldsymbol{v} = (1,2)^T$. Calculer les dérivées directionnelles de f et g en p_0 suivant le vecteur $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$.

Exercice 2. (Dérivée directionnelle, II)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et soit $\boldsymbol{e} = (u,v)^T$ un vecteur unitaire. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(0,0)$.

Exercice 3. (Pente extrémale)

Soit la fonction $f(x,y,z) = xyz$ et soit le point $p_0 = (1,-1,2)$.

i) Trouver la dérivée directionnelle de f en p_0 suivant le vecteur $\boldsymbol{e} = \frac{1}{3}(2,-1,2)^T$.

ii) Soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur unitaire exprimé en coordonnées sphériques, c.-à-d.

$$\boldsymbol{u} = \big(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\big)^T.$$

Calculer la pente de f en p_0 suivant le vecteur $\boldsymbol{u}$ en fonction de (θ, φ).

iii) Trouver les valeurs de θ et φ pour lesquelles la pente de f en p_0 est maximale respectivement minimale.

Ex. 4 - 8 au verso.

Exercice 4. (Approximation de Taylor dans $\mathbb{R}^3$)

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, une fonction de classe C^2 et soit $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Donner le développement limité *i*) linéaire et *ii*) quadratique de f au voisinage de (x_0, y_0, z_0).

Exercice 5. (Approximation de Taylor)

Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction f au voisinage du point donné.

i) $f(x,y) = x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1\,,\quad n = 2,\quad (x_0, y_0) = (0,0)$

ii) $f(x,y,z) = e^x + y\sinh(z)\,,\quad n = 2,\quad (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

iii) $f(x,y) = 3xy + x^2 - y + 5x - 3\,,\quad n = 1,\quad (x_0, y_0) = (1,-2)$

iv) $f(x,y) = \big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{2}+\sin(y)}\,,\quad n = 1,\quad (x_0, y_0) = \big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\big)$

Pour *i*), vérifier que l'erreur est d'ordre $d^2 \cdot \varepsilon(x,y)$, où $d = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 6. (Approximation de Taylor)

Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction f au voisinage du point donné. Comparer avec la méthode de calcul par composition des développements limités.

i) $f(x,y,z) = e^{2xz+y}\,,\quad (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

ii) $f(x,y) = \sin(2x + y^2)\,,\quad (x_0, y_0) = (1,1)$

Exercice 7. (QCM : révision limites et dérivées partielles)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

Exercice 8. (Question ouverte)

Donner un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est continue en $(0,0)$, admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'admet que des dérivées directionnelles unilatérales selon tout vecteur $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^T$ tel que $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$. Démontrer que la fonction donnée satisfait aux critères demandés. Est-ce qu'une telle fonction peut être différentiable en $(0,0)$?