Peter Wittwer
2 mai 2024

Analyse avancée II – Corrigé de la série 10A

Échauffement.

En appliquant directement la définition vue au cours on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos(\varphi),t\sin(\varphi))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2\cos(\varphi)^2\,t\sin(\varphi)}{t^2}-0}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\big(\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)\big) = \cos(\varphi)^2\sin(\varphi)\,.\end{aligned}$$

Les figures ci-dessous montrent le graphe de f (Fig. 1) et celui de la dérivée directionnelle $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(0,0)$ en fonction de l'angle φ qui détermine la direction autour de l'origine (Fig. 2).

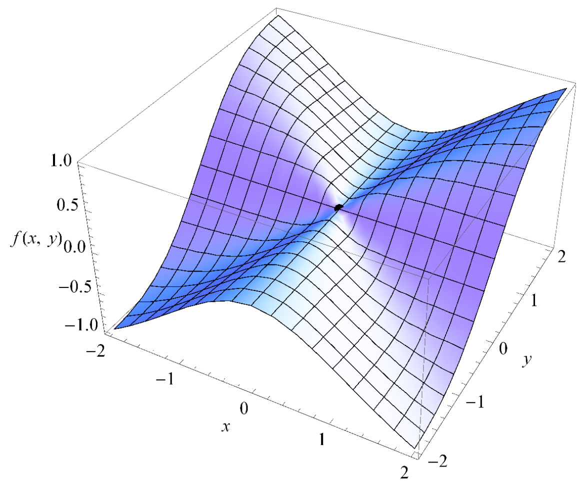

Fig. 1

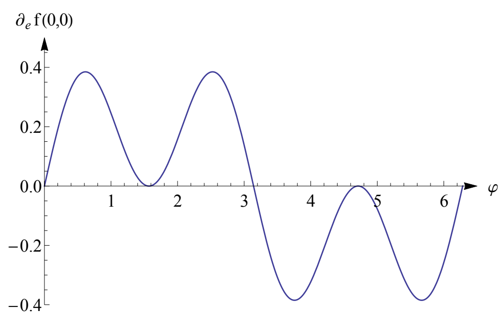

Fig. 2

Exercice 1.

Rappel: Pour un vecteur unitaire $\boldsymbol{e}$, la dérivée directionnelle d'une fonction f de classe C^1 au point p_0 suivant un vecteur $\boldsymbol{e}$ est donnée par $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(p_0) = \nabla f(p_0)\cdot \boldsymbol{e}\,.$

i) Observons qu'on a

$$f(x,y) = f_1(x,y)\,f_2(x,y), \quad \text{avec} \quad f_1(x,y) = (x-2y)^2 \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)\,.$$

Ainsi on peut utiliser le résultat de l'Exercise 1, *ii*) de la Série 7 pour calculer $\nabla f(p_0)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} f_1(p_0) &= 1\,, & \nabla f_1(x,y) &= 2(x-2y)\,\big(1,-2\big)^T & \Rightarrow\quad \nabla f_1(p_0) &= \big(-2,4\big)^T,\\ f_2(p_0) &= \ln(3)\,, & \nabla f_2(x,y) &= \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\big(2x,2y\big)^T & \Rightarrow\quad \nabla f_2(p_0) &= \big(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\big)^T, \end{aligned}$$

et donc (noter que $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(1,2\big)^T$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(p_0) &= \Big[f_2(p_0)\nabla f_1(p_0) + f_1(p_0)\nabla f_2(p_0)\Big] \cdot \boldsymbol{e} \\
&= \left[\ln(3)\big(-2,4\big)^T + \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\big(1,2\big)^T \\
&= \frac{2(3\ln(3)+1)}{\sqrt{5}} \,.
\end{aligned}$$

ii) Pour la fonction g on va utiliser le résultat de l'Exercise $1, iii)$ de la Série 7 puisqu'on a

$$g(x,y) = \frac{g_1(x,y)}{g_2(x,y)}, \quad \text{avec} \quad g_1(x,y) = e^{2x(y+1)} \quad \text{et} \quad g_2(x,y) = 3 + x^2y^4 \,.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
g_1(p_0) &= e^4 \,, & \nabla g_1(x,y) &= e^{2x(y+1)}\big(2y+2, 2x\big)^T & \Rightarrow \quad \nabla g_1(p_0) &= e^4\big(4,2\big)^T, \\
g_2(p_0) &= 4 \,, & \nabla g_2(x,y) &= \big(2xy^4, 4x^2y^3\big)^T & \Rightarrow \quad \nabla g_2(p_0) &= (2,4)^T \,,
\end{aligned}$$

pour obtenir finalement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{e}}(p_0) &= \left[\frac{1}{g_2(p_0)} \cdot \nabla g_1(p_0) - \frac{g_1(p_0)}{g_2(p_0)^2} \cdot \nabla g_2(p_0)\right] \cdot \boldsymbol{e} \\
&= \left[\frac{e^4}{4}\big(4,2\big)^T - \frac{e^4}{16}\big(2,4\big)^T\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\big(1,2\big)^T = \frac{11e^4}{8\sqrt{5}} \,.
\end{aligned}$$

Exercice 2.

On commence par étudier la continuité de f en $(0,0)$. Comme on a

$$\lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \,,$$

f n'est pas continue en $(0,0)$. Ainsi f n'est pas différentiable en ce point et on doit appliquer la définition pour calculer la dérivée directionnelle. Soit $\boldsymbol{e} = (u,v)^T$ un vecteur unitaire. Alors on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu, 0+tv) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{tut^2v^2}{t^2u^2+t^4v^4} - 0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{uv^2}{u^2+t^2v^4} = \begin{cases} \frac{v^2}{u}\,, & u \neq 0 \\ 0\,, & u = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'existence des dérivées directionnelles en un point dans toutes les directions n'est donc pas suffisante pour qu'une fonction soit continue et à fortiori différentiable en ce point!

Exercice 3.

i) Pour une fonction f de classe C^1, la dérivée directionnelle $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(p_0)$ au point p_0 suivant le vecteur (unitaire) $\boldsymbol{e}$ est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \boldsymbol{e}\,.$$

La fonction f donnée est bien C^1. Puisque

$$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)^T \qquad \text{et} \qquad \nabla f(1,-1,2) = (-2,2,-1)^T\,,$$

on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(1,-1,2) = (-2,2,-1)^T \cdot \frac{1}{3}(2,-1,2)^T = -\frac{8}{3}\,.$$

ii) La pente de f en p_0 dans le sens du vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ est donnée par la dérivée directionnelle suivant ce vecteur unitaire (voir § 7.1), c'est-à-dire par

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \boldsymbol{u} &= (-2,2,-1)^T \cdot \big(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\big)^T \\ &= 2\sin(\theta)\big(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big) - \cos(\theta) =: g(\theta,\varphi)\,,\end{aligned}$$

où $g : [0,\pi] \times [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

iii) On sait du cours (§ 7.2.2) qu'en un point où f est différentiable, la pente de la tangente au graphe est maximale (minimale) dans le sens du gradient (opposée au gradient) et qu'elle est égale à (l'opposée de) la norme du gradient. Au point $p_0 = (1,-1,2)$, la pente maximale (minimale) vaut donc

$$\|\nabla f(1,-1,2)\| = 3 \qquad \big(-\|\nabla f(1,-1,2)\| = -3\big).$$

Les directions correspondantes sont $\pm\frac{\nabla f(1,-1,2)}{\|\nabla f(1,-1,2)\|} = \pm\frac{1}{3}(-2,2,-1)$. Pour trouver les angles (θ,φ) donnant lieu à ces directions, on doit résoudre

$$\begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mp\frac{2}{3}\\ \pm\frac{2}{3}\\ \mp\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\theta = \arccos\big(\mp\tfrac{1}{3}\big) \quad\Rightarrow\quad \sin(\theta) = \sqrt{1-\big(\mp\tfrac{1}{3}\big)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\cos(\varphi) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\varphi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \begin{cases}\frac{3\pi}{4}\\ \frac{7\pi}{4}\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases}\operatorname{argmax} g(\theta,\varphi) = \big(\arccos\big(-\frac{1}{3}\big)\,,\, \frac{3\pi}{4}\big)\\ \operatorname{argmin} g(\theta,\varphi) = \big(\arccos\big(\frac{1}{3}\big)\,,\, \frac{7\pi}{4}\big)\end{cases}$$

La pente de f en p_0 est donc maximale pour les angles $(\theta,\varphi) = \big(\arccos\big(-\frac{1}{3}\big)\,,\,\frac{3\pi}{4}\big)$ et minimale pour $(\theta,\varphi) = \big(\arccos\big(\frac{1}{3}\big)\,,\,\frac{7\pi}{4}\big)$.

Exercice 4.

Les développements limités d'ordre n pour une fonction de trois variables s'obtiennent de la formule donnée au cours.
Dans la suite on pose $p_0 := (x_0, y_0, z_0)$ pour simplifier la notation.

i) Le développement linéaire de la fonction $f(x,y,z)$ au voisinage de p_0 est

$$f(x,y,z) = f(p_0) + f_x(p_0)\,(x-x_0) + f_y(p_0)\,(y-y_0) + f_z(p_0)\,(z-z_0) + d\cdot\varepsilon(x,y,z)\,,$$

où $d = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, et la notation $\varepsilon(x,y,z)$ signifie comme toujours que $\lim\limits_{(x,y,z)\to p_0} \varepsilon(x,y,z) = 0$.

ii) Pour le développement limité d'ordre 2 on obtient

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = f(p_0) &+ f_x(p_0)\,(x-x_0) + f_y(p_0)\,(y-y_0) + f_z(p_0)\,(z-z_0) \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(p_0)\,(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(p_0)\,(y-y_0)^2 + \frac{1}{2}f_{zz}(p_0)\,(z-z_0)^2 \\ &+ f_{xy}(p_0)\,(x-x_0)(y-y_0) + f_{xz}(p_0)\,(x-x_0)(z-z_0) + f_{yz}(p_0)\,(y-y_0)(z-z_0) \\ &+ d^2\varepsilon(x,y,z)\,, \end{aligned}$$

où d est définie comme ci-dessus, et $\lim\limits_{(x,y,z)\to p_0} \varepsilon(x,y,z) = 0$.

Exercice 5.

i) Le polynôme de Taylor $p_2(x,y)$ d'ordre 2 d'une fonction $f(x,y)$ au voisinage de l'origine est donné par

$$p_2(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)\,x^2 + f_{xy}(0,0)\,xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0,0)\,y^2.$$

Ici on a

$$\begin{aligned} &f(x,y) = x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1\,, \\ &f_x(x,y) = 2xy + 2y - 5\,, \qquad f_y(x,y) = x^2 + 2x + 6y\,, \\ &f_{xx}(x,y) = 2y\,, \qquad f_{xy}(x,y) = 2x + 2\,, \qquad f_{yy}(x,y) = 6\,, \end{aligned}$$

d'où

$$f(0,0) = 1, \quad f_x(0,0) = -5, \quad f_y(0,0) = 0, \quad f_{xx}(0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0) = 2, \quad f_{yy}(0,0) = 6,$$

et donc

$$p_2(x,y) = 1 + (-5)\cdot x + 0\cdot y + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot x^2 + 2\cdot xy + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot y^2 = 1 - 5x + 2xy + 3y^2.$$

ii) Comme on a vu à l'Exercise 4, *ii)*, le polynôme de Taylor $p_2(x,y,z)$ d'ordre 2 d'une fonction $f(x,y,z)$ de trois variables autour de l'origine est donné par

$$\begin{aligned} p_2(x,y,z) = {} & f(0,0,0) + f_x(0,0,0)\,x + f_y(0,0,0)\,y + f_z(0,0,0)\,z + \\ & \frac{1}{2}f_{xx}(0,0,0)\,x^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(0,0,0)\,y^2 + \frac{1}{2}f_{zz}(0,0,0)\,z^2 + \\ & f_{xy}(0,0,0)\,xy + f_{xz}(0,0,0)\,xz + f_{yz}(0,0,0)\,yz \end{aligned}$$

Ici on a

$$\begin{aligned} &f(x,y,z) = e^x + y\sinh(z)\,, \\ &f_x(x,y,z) = e^x\,, \qquad f_y(x,y,z) = \sinh(z)\,, \qquad f_z(x,y,z) = y\cosh(z)\,, \\ &f_{xx}(x,y,z) = e^x\,, \qquad f_{yy}(x,y,z) = 0\,, \qquad f_{zz}(x,y,z) = y\sinh(z)\,, \\ &f_{xy}(x,y,z) = 0\,, \qquad f_{xz}(x,y,z) = 0\,, \qquad f_{yz}(x,y,z) = \cosh(z)\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &f(0,0,0)=1, \quad f_x(0,0,0)=1, \quad f_y(0,0,0)=0, \quad f_z(0,0,0)=0, \quad f_{xx}(0,0,0)=1, \\ &f_{yy}(0,0,0)=0, \quad f_{zz}(0,0,0)=0, \quad f_{xy}(0,0,0)=0=f_{xz}(0,0,0), \quad f_{yz}(0,0,0)=1, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} p_2(x,y,z) &= 1+1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot 0\cdot y^2+\frac{1}{2}\cdot 0\cdot z^2+ \\ &\quad 0\cdot xy+0\cdot xz+1\cdot yz \\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+yz. \end{aligned}$$

iii) Le polynôme de Taylor $p_1(x,y)$ d'ordre 1 de $f(x,y)$ au voisinage de $(1,-2)$ est donné par

$$p_1(x,y)=f(1,-2)+f_x(1,-2)\,(x-1)+f_y(1,-2)\,(y+2).$$

Comme

$$\begin{aligned} &f(x,y)=3xy+x^2-y+5x-3\,, \\ &f_x(x,y)=3y+2x+5\,, \qquad f_y(x,y)=3x-1\,, \end{aligned}$$

et donc

$$f(1,-2)=-1, \quad f_x(1,-2)=1, \quad f_y(1,-2)=2\,.$$

Ainsi

$$p_1(x,y)=-1+(x-1)+2(y+2)=x+2y+2\,.$$

iv) On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{2}+\sin(y)} = \exp\Big(\big(\tfrac{1}{2}+\sin(y)\big)\ln\big(\cos(x)\big)\Big)\,, \\ f_x(x,y) &= -\big(\tfrac{1}{2}+\sin(y)\big)\big(\cos(x)\big)^{\sin(y)-\frac{1}{2}}\sin(x)\,, \\ f_y(x,y) &= \ln\big(\cos(x)\big)\big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{2}+\sin(y)}\cos(y)\,, \end{aligned}$$

d'où

$$f\Big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{1}{2}\,, \qquad f_x\Big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\Big)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad f_y\Big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\Big)=-\frac{\sqrt{3}}{4}\ln(2)\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p_1(x,y) &= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big(x-\frac{\pi}{3}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{4}\ln(2)\Big(y-\frac{\pi}{6}\Big) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\,(\ln(2)+4)-\frac{\sqrt{3}}{2}\,x-\frac{\sqrt{3}}{4}\ln(2)\,y\,. \end{aligned}$$

Pour *i*), l'erreur $d^2\cdot\varepsilon(x,y)$ doit satisfaire $\lim\limits_{d\to 0}\varepsilon(x,y)=0$, où $d=\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}$. Ici on a

$$d^2\cdot\varepsilon(x,y)=f(x,y)-p_2(x,y)=x^2y+2xy+3y^2-5x+1-(1-5x+2xy+3y^2)=x^2y$$

et donc, en utilisant les coordonnées polaires $x = d\cos(\varphi)$, $y = d\sin(\varphi)$,

$$\lim_{d\to 0}\varepsilon(x,y) = \lim_{d\to 0}\frac{\big(d\cos(\varphi)\big)^2\big(d\sin(\varphi)\big)}{d^2} = \lim_{d\to 0} d\cos(\varphi)^2\sin(\varphi) = 0,$$

puisque $|\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)| \le 1$ uniformément en $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Exercice 6.

i) *Méthode 1*: Les dérivées partielles de la fonction $f(x,y,z)$ sont

$$\begin{array}{lll} f_x(x,y,z) = 2z\,e^{2xz+y}, & f_y(x,y,z) = e^{2xz+y}, & f_z(x,y,z) = 2x\,e^{2xz+y} \\ f_{xx}(x,y,z) = 4z^2\,e^{2xz+y}, & f_{yy}(x,y,z) = e^{2xz+y}, & f_z(x,y,z) = 4x^2\,e^{2xz+y} \\ f_{xy}(x,y,z) = 2z\,e^{2xz+y}, & f_{xz}(x,y,z) = (2+4xz)\,e^{2xz+y}, & f_{yz}(x,y,z) = 2x\,e^{2xz+y} \end{array}$$

et on a

$$\begin{array}{lll} f_x(0,0,0) = 0, & f_y(0,0,0) = 1, & f_z(0,0,0) = 0 \\ f_{xx}(0,0,0) = 0, & f_{yy}(0,0,0) = 1, & f_z(0,0,0) = 0 \\ f_{xy}(0,0,0) = 0, & f_{xz}(0,0,0) = 2, & f_{yz}(0,0,0) = 0 \end{array}$$

Ainsi le polynôme de Taylor $p_2(x,y,z)$ d'ordre 2 est

$$p_2(x,y,z) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + 2xz\,.$$

Méthode 2: On a $f(x,y,z) = g(h(x,y,z))$ avec $g(u) = e^u$ et $h(x,y,z) = 2xz+y$. Puisque $h(0,0,0) = 0$, on doit utiliser le développement limité (DL) de g en $u = 0$, c'est-à-dire

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\tilde{\varepsilon}(u),$$

avec $\lim_{u\to 0}\tilde{\varepsilon}(u) = 0$. On remplace $u = 2xz + y$:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 1 + 2xz + y + \frac{(2xz+y)^2}{2} + (2xz+y)^2\tilde{\varepsilon}(2xz+y) \\ &= 1 + 2xz + y + \frac{y^2}{2} + 2x^2z^2 + 2xyz + (2xz+y)^2\tilde{\varepsilon}(2xz+y) \\ &= 1 + 2xz + y + \frac{y^2}{2} + d^2\varepsilon(x,y,z)\,, \end{aligned}$$

avec $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et

$$\varepsilon(x,y,z) = \frac{2x^2z^2 + 2xyz + (2xz+y)^2\tilde{\varepsilon}(2xz+y)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Les termes $2x^2z^2$ et $2xyz$ on été mis dans le reste car ils sont d'ordre superieur à 2 (4 et 3 dans ce cas). On vérifie que $\lim_{(x,y,z)\to 0}\varepsilon(x,y,z) = 0$. En utilisant les coordonnees spheriques on vérifie facilement que

$$\lim_{(x,y,z)\to 0}\frac{2x^2z^2}{x^2+y^2+z^2} = 0, \qquad \lim_{(x,y,z)\to 0}\frac{2xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

et $|(2xz+y)^2/(x^2+y^2+z^2)| < C$ pour tout (x,y,z), avec $C>0$ une constante. Il s'ensuit

$$\lim_{(x,y,z)\to 0}\left|\frac{(2xz+y)^2\tilde{\varepsilon}(2xz+y)}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \lim_{(x,y,z)\to 0} C|\tilde{\varepsilon}(2xz+y)| = 0,$$

vu que $\lim_{u\to 0}\tilde{\varepsilon}(u)=0$. On a donc bien trouvé $\lim_{(x,y,z)\to 0}\varepsilon(x,y,z)=0$ et donc

$$p_2(x,y,z) = 1+y+\frac{y^2}{2}+2xz\,.$$

ii) *Méthode 1*: Les dérivées partielles de f sont

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\cos(2x+y^2), & f_y(x,y) &= 2y\cos(2x+y^2),\\ f_{xx}(x,y) &= -4\sin(2x+y^2), & f_{yy}(x,y) &= 2\cos(2x+y^2)-4y^2\sin(2x+y^2),\\ f_{xy}(x,y) &= -4y\sin(2x+y^2) \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} &f_x(1,1) = 2\cos(3), && f_y(1,1) = 2\cos(3),\\ &f_{xx}(1,1) = -4\sin(3), && f_{yy}(1,1) = 2\cos(3)-4\sin(3), && f_{xy}(1,1) = -4\sin(3). \end{aligned}$$

Par la formule du cours on a alors pour le polynôme de Taylor $p_2(x,y)$ d'ordre 2

$$\begin{aligned} p_2(x,y) &= \sin(3)+2\cos(3)\,(x-1)+2\cos(3)\,(y-1)+\frac{1}{2}(-4\sin(3))\,(x-1)^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\big(2\cos(3)-4\sin(3)\big)\,(y-1)^2+(-4\sin(3))\,(x-1)(y-1)\\ &= \sin(3)+2\cos(3)\,(x-1)+2\cos(3)\,(y-1)-2\sin(3)\,(x-1)^2\\ &\quad+\big(\cos(3)-2\sin(3)\big)\,(y-1)^2-4\sin(3)\,(x-1)(y-1) \end{aligned}$$

Méthode 2: On a $f(x,y)=g(l(x,y))$ avec $g(u)=\sin(u)$ et $l(x,y)=2x+y^2$. Puisque $l(1,1)=3$, on doit utiliser le DL de g en $u=3$, c'est-à-dire

$$\sin(u) = \sin(3)+\cos(3)(u-3)-\frac{\sin(3)}{2}(u-3)^2+(u-3)^2\tilde{\varepsilon}(u)$$

avec $\lim\limits_{u\to 3}\tilde{\varepsilon}(u)=0$.
Comme on cherche le DL dans un point (x_0,y_0) non-nul, on doit explicitement écrire $x = x_0+h = 1+h$ et $y=y_0+k=1+k$ avant de remplacer u:

$$u = l(x,y) = l(1+h,1+k) = 2(1+h)+(1+k)^2 = 3+2h+2k+k^2\,.$$

Avec ceci on obtient

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sin(3)+\cos(3)\big(2h+2k+k^2\big)-\frac{\sin(3)}{2}\big(2h+2k+k^2\big)^2+(2h+2k+k^2)^2\tilde{\varepsilon}(l(x,y))\\ &= \sin(3)+2\cos(3)\,h+2\cos(3)\,k+\cos(3)\,k^2-\frac{\sin(3)}{2}\big(4h^2+8hk+4k^2\big)+d^2\varepsilon(x,y)\\ &= \sin(3)+2\cos(3)\,h+2\cos(3)\,k-2\sin(3)\,h^2+\big(\cos(3)-2\sin(3)\big)\,k^2\\ &\quad-4\sin(3)\,h\,k+d^2\varepsilon(x,y), \end{aligned}$$

où $d = \sqrt{h^2 + k^2}$ et ε est défini de manière similaire à l'exercice précèdent, c'est a dire qu'il contient $\tilde{\varepsilon}$ et les termes d'ordre supérieur.

Ce résultat correspond bien à celui obtenu par la méthode 1.

Exercice 7. Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- [ ] $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
- [ ] $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$
- [x] $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$
- [ ] $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

On calcule la dérivée partielle concernée. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}(-1) = -1.$$

Remarque: *Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-5y^4(x^4+y^4) - 4y^3(x^5-y^5)}{(x^4+y^4)^2} = \frac{-y^8 - 5y^4x^4 - 4y^3x^5}{(x^4+y^4)^2}$$

et il est facile à montrer (en passant en coordonnées polaires par exemple) que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

n'existe pas.

Exercice 8.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2|y|}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

On a $|f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)| < r$ ce qui implique que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

et f (Fig. 3) est donc continue en $(0,0)$. Pour les dérivées partielles on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2\cdot|0|}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0^2\cdot|h|}{h^2} - 0}{h} = 0$$

et pour les dérivées directionnelles selon un vecteur $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^T$ on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(v_1^2\, t^2)\, |v_2||t|}{(v_1^2 + v_2^2)\, t^2} - 0}{t} = \frac{v_1^2 |v_2|}{v_1^2 + v_2^2} \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\,.$$

La dérivée directionnelle n'est donc pas définie si $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$. La dérivée directionnelle unilatérale est par contre définie et on a

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}_+}(0,0) = \frac{v_1^2 |v_2|}{v_1^2 + v_2^2} \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{|t|}{t} = \frac{v_1^2 |v_2|}{v_1^2 + v_2^2}\,.$$

Une fonction qui satisfait aux critères ne peut pas être différentiable en $(0,0)$, car une fonction différentiable possède des dérivées directionnelles selon tout vecteur $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.

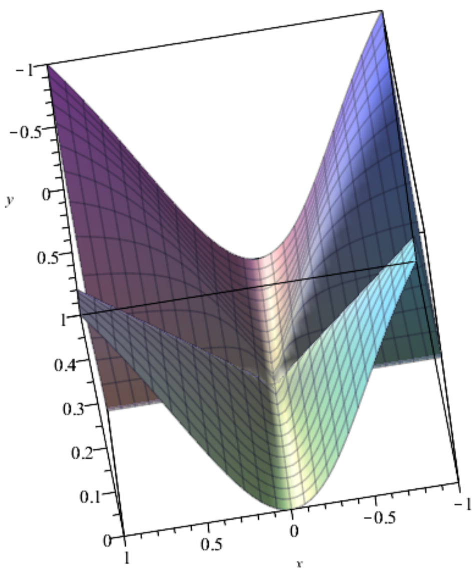

Fig. 3