EPFL
Section PH

Peter Wittwer
3 mai 2024

Analyse avancée II – Série 9B

Échauffement. (Dérivation sous l'intégrale)

Soit g une fonction de classe $C^1\big(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\big)$ et soit $f(x)=\int_0^1 g(x,t)\,dt$. Montrer que f est de classe $C^1\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$ et

$$f'(x)=\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Exercice 1. (Dérivation sous l'intégrale)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\int_0^x \sin\Big(x\sqrt{1+t^2}\Big)\,dt.$$

Montrer que f admet un minimum local en $x=0$.

Exercice 2. (La fonction Gamma)

Soit la fonction $\Gamma\colon\ ]0,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ définie par

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Montrer :

i) $\Gamma\in C^1(\,]0,+\infty[\,,\mathbb{R})$ et $\Gamma'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(t)\,t^{x-1}e^{-t}\,dt.$

ii) $\Gamma\in C^\infty(\,]0,+\infty[\,,\mathbb{R})$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $\Gamma^{(k)}(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln(t))^k\,t^{x-1}e^{-t}\,dt.$

iii) $\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\ \Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ \Gamma(n+1)=n!$ (par convention $0!=1$).

Exercice 3. (Intégrales généralisées, procédure de “cut-off”)

Montrer par la procédure qui suit qu'au sens des intégrales généralisées

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}\,.$$

i) Montrer (par intégration par partie) que l'intégrale converge.

ii) Montrer que la fonction $f\colon\ ]0,\infty[\ \to\mathbb{R},\ f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\frac{\sin(t)}{t}\,dt,$ est de classe $C^1\left(]0,+\infty[\,,\mathbb{R}\right)$ et que $I=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$.

iii) Calculer la fonction $f'(x)$ et montrer (par intégration par partie) que $f'(x)=-1-x^2f'(x)$.

iv) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, de sorte que $I=-\displaystyle\int_0^{+\infty}f'(x)\,dx$.