Analyse avancée II – Série 11A

Échauffement. (Extremums)

Déterminer les points stationnaires de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - y + 1$ et étudier leur nature.

Exercice 1. (Points stationnaires)

Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données ci-dessous, étudier la nature du point stationnaire $(0,0)$:

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ *ii)* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *iii)* $f(x,y) = -x^2 + y^2$

iv) $f(x,y) = -x^2 - y^2$ *v)* $f(x,y) = x^4 + y^4$ *vi)* $f(x,y) = x^4 - y^4$

vii) $f(x,y) = -x^4 + y^4$ *viii)* $f(x,y) = -x^4 - y^4$

Exercice 2. (Classification des points stationnaires)

i) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, soit (x_0, y_0) un point stationnaire de f et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $H_f(x_0, y_0)$. Etablir la nature de (x_0, y_0) à partir de chacune des trois conditions sur λ_1, λ_2 vues au cours.

iii) Calculer les coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ pour la fonction $f(x,y) = 4xy$ autour de son unique point stationnaire et en déduire sa nature.

Exercice 3. (Extremums, $\mathbb{R}^2$)

Déterminer les points stationnaires des fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes et étudier leur nature.

i) $f(x,y) = 2 + 3y^2 + \cos(x)$ *ii)* $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2 + 2xy + y^2$

iii) $f(x,y) = -3x^2 + xy^2 - y^4$

Exercice 4. (Extremums, $\mathbb{R}^3$)

Déterminer les points stationnaires des fonctions $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivantes et étudier leur nature.

i) $f(x,y,z) = -2x^2 - 5y^2 - z^2 + 4xy + 2yz + 2$ *ii)* $f(x,y,z) = 2x^2 - 3xz^2 + y^3 + 3z^2 - 3y + 4$

Exercice 5. (Extremums absolus, $\mathbb{R}^2$)

Déterminer les extremums absolus de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

i) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$, où $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3\}$

ii) $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y$, où $D = \{(x,y) : y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 32\}$

Indication : le polynôme qui apparaîtra admet certaines racines entières.

Ex. 6 - 8 au verso.

Exercice 6. (Extremums absolus, $\mathbb{R}^3$)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z + 1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x + 2\,.$$

Déterminer les extremums absolus de f sur le domaine

$$D = \{(x, y, z) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c\}\,, \qquad \text{où } \ a, b, c > 0\,,$$

sachant que $f(0, 0, 0) = 3$.

Exercice 7. (Pentes extrémales)

Soient la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$, le point $p_0 = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$, ainsi que le vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$, donné en coordonnées sphériques (dans le référentiel local attaché en p_0) par

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La dérivée directionnelle de f en p_0 suivant le vecteur $\boldsymbol{u}$ est donnée par la fonction $g\colon [0, \pi] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$,

$$g(\theta, \varphi) = 2\sin(\theta)\big(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\big) - \cos(\theta)$$

(cf. Ex. 3 de la Série 10). Trouver les extremums de g en calculant ses points stationnaires et calculer les vecteurs $\boldsymbol{u}$ associés. Comparer avec les résultats obtenus à la Série 10.

Exercice 8. (Application à la géométrie)

Trouver le point $P(x, y)$ à l'intérieur du triangle ABC pour lequel le produit des distances aux droites d'équations $\ x = 0\,,\ \ y = 0\ $ et $\ x + y = a\ \ (a > 0)$ est maximale.