Peter Wittwer

Analyse avancée II – Corrigé de la série 10B

Echauffement. (Théorème de la fonction réciproque)

Pour l'énoncé voir le cours. la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est continûment différentiable, strictement monotone et surjective, mais ne satisfait pas les conditions du théorème sur $\mathbb{R}$, car $f'(0) = 0$.

Exercice 1. (Théorème de la fonction réciproque)

i) Pour la matrice jacobienne de F on a

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et pour le jacobien de F

$$\det\bigl(J_F(x,y)\bigr) = 4x^2 + 4y^2.$$

Il existe une fonction inverse dans un voisinage de tout point (x,y) tel que $\det\bigl(J_F(x,y)\bigr) \neq 0$. Ceci est le cas à l'exception de $(x,y) = (0,0)$ et on a donc un inverse dans un voisinage du point $(x,y) = (1,0)$.

ii) Non, parce que F n'est pas injective car, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $F(-x,-y) = F(x,y)$. En fait, si on pose

$$(\bar{x},\bar{y}) = F(x,y),$$

on a en notation complexe, avec $z = x + iy$ et $\bar{z} = \bar{x} + i\bar{y}$, que $\bar{z} = z^2$ et z et $-z$ on donc la même image. En pratique, pour étudier les application du plan, il s'avère souvent avantageux de passer en notation complexe.

Exercice 2. (Théorème de la fonction réciproque)

Par définition de "difféomorphisme", les fonctions ϕ, ψ, ϕ^{-1} et ψ^{-1} sont toutes de classe C^1 sur leur domaine, et par conséquence on a que $\phi^{-1} \circ \psi^{-1} \in C^1(W,U)$. Ils reste à montrer que $\phi^{-1} \circ \psi^{-1}$ est l'inverse de $\psi \circ \phi$. Par l'associativité de la composition des fonctions on a :

$$\bigl(\psi \circ \phi\bigr) \circ \bigl(\phi^{-1} \circ \psi^{-1}\bigr) = \psi \circ \bigl(\phi \circ \phi^{-1}\bigr) \circ \psi^{-1} = \psi \circ \mathrm{Id} \circ \psi^{-1} = \mathrm{Id},$$

ce qui montre que c'est un inverse à droite (et donc aussi un inverse à gauche et donc un inverse; voir le cours d'algèbre linéaire).

Exercice 3. (Théorème de la fonction réciproque)

D'après le théorème d'existence d'une fonction inverse locale, $g \in C^1(V,U)$ et on peut calculer sa dérivée g' en utilisant que sur V, $f \circ g = \mathrm{Id}$, ce qui donne sur V (voir Analyse I),

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g' = 1,$$

et donc

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

et en tant que composition de deux fonctions de classe C^1, $g' \in C^1(V,U)$. Pour la fonction g'' on obtient sur V

$$g'' = \frac{-1}{(f' \circ g)^2} \left(f'' \circ g\right) g' = \frac{-1}{(f' \circ g)^3} \left(f'' \circ g\right).$$

Exercice 4. (Difféomorphisme et orientation)

i) Supposons l'existence de $x, y \in U$ tels que $\det(J_\psi)(x) < 0$ et $\det(J_\psi)(y) > 0$. Puisque U est supposé connexe par arc et $\det(J_\psi)$ est une fonction continue sur U, le théorème de la valeur intermédiaire (voir Analyse I) montre qu'il existe pour tout chemin continue $\gamma\colon [0,1] \to U$ tel que $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$ un $t_0 \in]0,1[$ tel que $\det(J_\psi)(\gamma(t_0) = 0$. Ceci est impossible puisque ψ est un difféomorphisme. Cette contradiction prouve le résultat.

ii) Un simple exemple en dimension $n = 1$ et le suivant : on choisit $U =]-4,-3[\cup]1,2[$ et $V =]1,2[\cup]3,4[$ et définit le difféomorphisme $\psi\colon U \to V$ par $\psi(x) = |x|$. En effet, ψ satisfait $\forall x \in]-4,-3[\,,\ \det(J_\psi)(x) = \psi'(x) = -1$ et $\forall x \in]1,2[\,,\ \det(J_\psi)(x) = \psi'(x) = 1$.