EPFL

Ens: P. Wittwer
Analyse avancée II - (n/a)
10 août 2020
Durée : 3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz+1 \\ y-x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(u,v) = \begin{pmatrix} u^3+v^2 \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}$$

Alors on a les matrices jacobiennes suivantes :

- ☐ $J_{g\circ f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_{f\circ g}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{g\circ f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_{f\circ g}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{g\circ f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_{f\circ g}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{g\circ f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_{f\circ g}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Question 2 : Soit $D = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon\ u > 0,\ u+3v > 0\big\}$, $h\colon D \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$h(u,v) = \big(\ln(u) + v^2\,,\ 2uv\,,\ \ln(u+3v)\big)^{\mathrm{T}},$$

$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$, une fonction de classe $C^1\big(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\big)$, et soit $f = g \circ h$. Alors, indépendamment du choix de g, on a :

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) + 3\dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) + 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) + 3\dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) + 3\dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)$

Question 3 : L'intégrale

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_y^x \exp\!\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3\right) dz \right) dy \right) dx$$

vaut :

- ☐ $\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} - \mathrm{e}$
- ☐ $\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} - 1$
- ☐ $\mathrm{e} - 1$
- ☐ $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$

Question 4 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$ et $y'(1) = 2$ vérifie aussi :

- ☐ $y''(2) = \mathrm{e}^2$
- ☐ $y''(2) = \frac{1}{2}$
- ☐ $y''(2) = \frac{5}{2}$
- ☐ $y''(2) = 2 + \mathrm{e}$

Question 5 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{x^2+2xy-y^2+x-y}$. Alors son polynôme de Taylor d'ordre deux autour du point $(0,0)$ est donné par

- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y - \frac{3}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y + \frac{3}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 + 2xy - y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - 2xy - y^2$

Question 6 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - x^3y}{\sqrt{x^4 + 2y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, mais l'une des dérivées partielles de f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, mais f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
- ☐ toutes les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Question 7 : Soit la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = \cos(xy) + \ln(y+z)\ ,$$

où $D =]0, +\infty[^3 \subset \mathbb{R}^3$, et soit le vecteur $v = (1, -2, 2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. Alors on a pour la dérivée directionnelle $\dfrac{\partial f}{\partial v}$:

- ☐ $\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2}, 1, 1\right) = -1$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2}, 1, 1\right) = -\pi + 1$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2}, 1, 1\right) = \pi - 1$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2}, 1, 1\right) = \pi$

Question 8 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 + x_2x_3 - x_3x_4$, et soit $a = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$. Alors l'équation de l'hyper-plan tangent au point $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ du graphe de f,

$$\Gamma(f) = \left\{((x_1, x_2, x_3, x_4), x_5) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \colon x_5 = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\right\}$$

est :

- ☐ $-2 + 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 0$
- ☐ $-2 + 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 0$
- ☐ $-2 + 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 0$
- ☐ $-2 + 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$

Question 9 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z + z + y^4z^5 - 22$, soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage du point $(x,y) = (1,2)$ et soit la fonction $g\colon U \to \mathbb{R}$ telle que $g(1,2) = 1$ et $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y,g(x,y)) = 0$. Alors :

- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2) = \dfrac{18}{41}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2) = -\dfrac{18}{41}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2) = \dfrac{41}{18}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2) = -\dfrac{41}{18}$

Question 10 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'' + 6u' + 9u = 2\mathrm{e}^{-3t}$$

qui satisfait la condition initiale $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$ vérifie aussi :

- ☐ $u(-1) = 2\mathrm{e}^3$
- ☐ $u(-1) = 0$
- ☐ $u(-1) = \mathrm{e}^3$
- ☐ $u(-1) = -1$

Question 11 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine dans le premier quadrant délimité par les courbes $y = x^3,\ \ y = 2x^3,\ \ y = \dfrac{1}{x}$ et $y = \dfrac{3}{x}$, c'est-à-dire soit

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y > 0,\ x^3 \le y \le 2x^3,\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{3}{x} \right\}$$

Alors, l'intégrale

$$\int_D y^4 \, dx\, dy$$

vaut :

- ☐ 20
- ☐ $\frac{560}{3}$
- ☐ 5
- ☐ 10

Question 12 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \ln(\,1 + |9 + x + y|\,)$. Alors le maximum global de la fonction f sous la contrainte $x^2 + 2y^2 = 6$ vaut :

- ☐ $\ln(19)$
- ☐ $\ln(7)$
- ☐ $\ln(17)$
- ☐ $\ln(13)$

Question 13 : Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le z \le x^2 + y^2 \le 1\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D e^z \, dx\, dy\, dz$$

vaut :

- ☐ $\pi\,(\mathrm{e} - 2)$
- ☐ $\frac{1}{2}\,\mathrm{e} - 1$
- ☐ $\mathrm{e} - 1$
- ☐ $\pi\,(\mathrm{e} - 1)$

Question 14 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$. Alors, f possède sur $\mathbb{R}^2$:

- ☐ 1 point selle
- ☐ 2 points selles
- ☐ aucun point selle
- ☐ 4 points selles

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 15 : Soit $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x,y) = |x|\, g(y)$. Alors, pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, admet, dans tout voisinage de x_0 suffisamment petit, exactement une solution $y(x)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : Une union quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 17 : Soit $X = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et soit $(x_k)_{k \geq 0}$, $x_k \in X$, une suite bornée, c'est-à-dire il existe $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$, tel que $\forall k \geq 0$, $\|x_k\|_\infty \leq C$. Alors il existe une sous-suite $\left(x_{k_j}\right)_{j \geq 0}$ qui converge vers un élément de X.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Soit $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un point tel que $F(x_0, y_0) = 0$, et $\det\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ telle que $y_0 = f(x_0)$ et, $\forall x \in U$, $F(x, f(x)) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, telle que $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \to 0}} f(tv) = 0$. Alors $\lim\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \to 0}} f(x) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide ouvert et borné, et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est une fonction bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. Si en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le gradient de f existe et vaut zéro, alors x_0 est un point stationnaire de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit l'ensemble $D = D_1 \cup D_2$, où $D_1 = \left\{\left(x^2, \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x \leq 1\right\}$, et $D_2 = \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leq y \leq 1\right\}$. Alors, D est un ensemble connexe.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Vos réponses doivent être soigneusement justifiées et toutes les étapes de votre raisonnement doivent y figurer. Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé**.

Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Tourner les pages ! Cette section contient 5 questions à 6 points chacune !

Question 23: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 *Réservé au correcteur*

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ pour une fonction $y(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec p et q des fonctions continues sur un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$. Soient y_1 et y_2 deux solutions quelconques de l'équation sur I, et soit $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ le Wronskien des deux solutions.

(a) Montrer que si les deux solutions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes, alors $\forall x \in I \; w(x) = 0$.

(b) Montrer que s'il existe $x_0 \in I$ tel que $w(x_0) = 0$, alors $\forall x \in I \; w(x) = 0$ et les solutions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

(c) Montrer que la dimension de l'espace vectoriel des solutions est deux.

Question 24: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 *Réservé au correcteur*

Soit l'équation différentielle pour une fonction $y(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$y' = \mathrm{e}^{x+y}.$$

Trouver, pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donné, la solution maximale telle que $y(x_0) = y_0$.

Question 25: *Cette question est notée sur 6 points.*

0 1 2 3 4 5 6 *Réservé au correcteur*

Soit
$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\}.$$
Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x\,y\,z$.

Question 26: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 *Réservé au correcteur*

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact non vide. Démontrer que toute fonction $f\colon C \to \mathbb{R}$ qui est continue sur C est uniformément continue sur C.

Question 27: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 *Réservé au correcteur*

Soit l'espace vectoriel V des matrices réelles $n \times n$ équipé de la norme

$$\|A\|_{2,2} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Soit $A \in V$ telle que $\|A\|_{2,2} \leq \frac{1}{2}$. Montrer que la suite $(B_k)_{k \geq 0}$ définie par $B_k = \sum_{l=0}^{k} A^l$ est une suite de Cauchy dans V. Comme vu au cours, $A^0 = I$, avec $I \in V$ la matrice identité.