Analyse avancée II – Série 11B

Échauffement. (Théorème des fonctions implicites)
Énoncer le théorème des fonctions implicites pour une équation de la forme $F(x, y) = 0$, où F est une fonction de de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exercice 1. (Théorème des fonctions implicites)
Soit le système d'équations

$$\begin{aligned} x - y^3 + z + 8 &= 0, \\ x^3 + y^4 - z^5 - 16 &= 0. \end{aligned}$$

i) Montrer que ces équations définissent, au voisinage du point $x = 0$, d'une manière implicite, deux fonctions $y = f_1(x)$ et $z = f_2(x)$, telles que $(f_1(0), f_2(0)) = (2, 0)$.

ii) Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ pour chacune des deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

iii) Quelles autres fonctions implicites les équations définissent-t-elles ?

(a) $x = f_3(y)$ et $z = f_4(y)$ au voisinage de $y = 2$, avec $(f_3(2), f_4(2)) = (0, 0)$?
(b) $x = f_5(z)$ et $y = f_6(z)$ au voisinage de $z = 0$, avec $(f_5(0), f_6(0)) = (0, 2)$?

Exercice 2. (Théorème des fonctions implicites)
Soit l'équation

$$-1 + x^2 + yz^5 + \arctan(xyz) + \ln\left(\frac{\sqrt{1 + x + z}}{3z}\right) + \ln\left(\sqrt[3]{y^2 + z^3}\right) = 0.$$

i) Montrer que cette équation définit, dans un voisinage du point $(x, y) = (1, 0)$, une fonction implicite $z = f(x, y)$ telle que $f(1, 0) = 7$.

ii) Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(1, 0, 7)$.

Exercice 3. (Théorème des fonctions implicites)
Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$F\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2 + w_1^2 \\ e^{u_1} - 1 + u_2 + w_2 \end{pmatrix}.$$

i) Montrer que $F(0, 0) = 0$ et que $F \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

ii) Soit $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ la boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ centrée en $w \equiv (w_1, w_2) = (0, 0)$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $f \in C^1(B(0, \varepsilon), \mathbb{R}^2)$ telle que, $\forall w \in B(0, \varepsilon)$, $F(f(w), w) = 0$.

iii) Calculer $f'(0)$.