



Analyse avancée II – Corrigé de la série 0A

Échauffement.

Les solutions sont :

- i)* $y(x) = x^2 + C$ pour $x, C \in \mathbb{R}$ (obtenue par intégration)
- ii)* $y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + C_1x + C_2$ pour $x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (obtenue par intégration)
- iii)* $y(x) = Ce^x - 1$ pour $x, C \in \mathbb{R}$ (exemple du cours)
- iv)* $y(x) = \frac{C}{x}$ pour $C \in \mathbb{R}$ et $x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, \infty[$ (exemple du cours)

Exercice 1.

- i)* ordre 3, autonome
- ii)* ordre 1, non autonome
- iii)* ordre 1, non autonome
- iv)* ordre 1, non autonome
- v)* ordre 2, non autonome
- vi)* ordre 2, non autonome
- vii)* ordre 3, non autonome

Exercice 2.

i) Pour $\omega \neq 0$ on vérifie la proposition par un calcul explicite. En effet, on a

$$\begin{aligned}y'(x) &= -C_1\omega \sin(\omega x) + C_2\omega \cos(\omega x), \\y''(x) &= -C_1\omega^2 \cos(\omega x) - C_2\omega^2 \sin(\omega x) = -\omega^2 y(x),\end{aligned}$$

et donc on a bien $y'' + \omega^2 y = 0$.

ii) Si $\omega = 0$, l'équation différentielle se réduit à $y'' = 0$. En intégrant deux fois, on obtient la solution générale de cette équation qui est $y(x) = C_1x + C_2$ pour $x \in \mathbb{R}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

iii) Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned}y(1) &= C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 = 3, \\y'(1) &= -C_1 \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_1 \frac{\pi}{2} = 2.\end{aligned}$$

Ainsi on doit avoir $C_1 = -\frac{4}{\pi}$ et $C_2 = 3$.

Exercice 3.

i) La dérivée de y est

$$y'(x) = \tan(x) + \frac{x}{\cos(x)^2} + C \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}.$$

En utilisant la définition de $\tan(x)$, on trouve que

$$\begin{aligned} y'(x) - \tan(x)y(x) &= \tan(x) + \frac{x}{\cos(x)^2} + C \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} - \tan(x) \left(1 + x \tan(x) + \frac{C}{\cos(x)} \right) \\ &= x \left(\frac{1}{\cos(x)^2} - \tan(x)^2 \right) = x \frac{1 - \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = x. \end{aligned}$$

Les fonctions $y(x)$ satisfont donc l'équation différentielle donnée.

Remarque: On peut aussi utiliser directement que $(\tan(x))' = 1 + \tan(x)^2$.

ii) On procède de la même manière qu'au point précédent. On a

$$y'(x) = 2 \cos(x) - \sin(2x) - C \cos(x) e^{-\sin(x)},$$

et donc, avec un peu de trigonométrie,

$$\begin{aligned} y'(x) + \cos(x)y(x) &= 2 \cos(x) - \sin(2x) - C \cos(x) e^{-\sin(x)} \\ &\quad + \cos(x) \left(2 \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{3}{2} + C e^{-\sin(x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \cos(x) \cos(2x) \\ &= \frac{1}{2} \cos(x) \underbrace{(1 + \cos(2x))}_{=2 \cos(x)^2} = \cos(x)^3. \end{aligned}$$

Les fonctions $y(x)$ satisfont donc l'équation différentielle donnée.

Exercice 4.

i) Vérification immédiate par un calcul direct.

ii) On a

$$y'(x) = \frac{1}{2y(x)} \frac{-C}{(x-1)^2} e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)},$$

et

$$y(x)^2 + 1 = e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y'(x) \frac{2y(x)(x-1)}{y(x)^2 + 1} + \ln(y(x)^2 + 1) &= \frac{1}{2y(x)} \frac{-C}{(x-1)^2} e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)} \frac{2y(x)(x-1)}{e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}} + \ln\left(e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\right) \\ &= \frac{-C}{x-1} + \ln\left(e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\right) = \frac{-C}{x-1} + \frac{C}{x-1} = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire les fonctions $y(x)$ satisfont l'équation différentielle donnée.

Avec $y(2) = -3$, on se trouve dans le cas où $x > 1$ et $y(x)$ est donnée par la racine négative.

On a

$$y(2) = -\sqrt{e^C - 1} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad e^C - 1 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad C = \ln(10) > 0.$$

Quand $y\left(-\frac{3}{2}\right) = 2$, on est dans le cas où $x < 1$ et $y(x)$ est la racine positive. On a

$$y\left(-\frac{3}{2}\right) = \sqrt{e^{\left(-\frac{2C}{5}\right)} - 1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\left(-\frac{2C}{5}\right)} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{5}{2} \ln(5) < 0.$$

Remarque (digression): On parle ici d'une équation différentielle *exacte* parce qu'elle est de la forme $\frac{d}{dx}F(y(x), x) = 0$ où $F(y, x) = (x - 1) \ln(y^2 + 1)$.

Exercice 5.

i) Pour $x > 0$ on a

$$y'(x) = 1 - \frac{2(1 + xe^{-x}) - 2x(e^{-x} - xe^{-x})}{(1 + xe^{-x})^2} = 1 - \underbrace{\frac{2}{1 + xe^{-x}}}_{=\frac{y(x)}{x}} + \frac{2xe^{-x}(1-x)}{(1 + xe^{-x})^2},$$

et

$$\begin{aligned} y(x)^2 - x^2 &= \left(x - \frac{2x}{1 + xe^{-x}}\right)^2 - x^2 = -\frac{4x^2}{1 + xe^{-x}} + \frac{4x^2}{(1 + xe^{-x})^2} \\ &= \frac{-4x^2(1 + xe^{-x}) + 4x^2}{(1 + xe^{-x})^2} = \frac{-4x^3e^{-x}}{(1 + xe^{-x})^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$2x^2 y'(x) = 2x y(x) - \frac{4x^3 e^{-x}(x-1)}{(1 + xe^{-x})^2},$$

et donc

$$2x^2 y'(x) - (x-1)(y(x)^2 - x^2) - 2x y(x) = -\frac{4x^3 e^{-x}(x-1)}{(1 + xe^{-x})^2} - (x-1) \frac{-4x^3 e^{-x}}{(1 + xe^{-x})^2} = 0.$$

La fonction $y:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$y(x) = x - \frac{2x}{1 + xe^{-x}},$$

est donc une solution de l'équation différentielle. On a en plus

$$y(1) = 1 - \frac{2}{1 + e^{-1}} = 1 - \frac{2e}{e+1} = \frac{1-e}{1+e},$$

et y est donc une solution pour la condition initiale donnée.

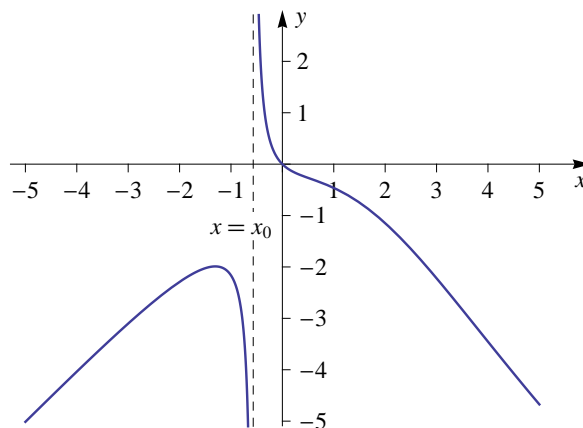
ii) La solution n'est pas maximale, car l'expression qui définit la fonction y satisfait l'équation pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 1 + xe^{-x} \neq 0$, c'est-à-dire pour $x \neq x_0 = -0.5671432904\dots$ (On peut calculer x_0 par la méthode de bisection en utilisant que la fonction g est continue et que $g(-1) = 1 - e < 0$ et $g(0) = 1 > 0$. Mais pour cet exercice, il suffit de constater que $x_0 \in]-1, 0[$ par ce même raisonnement.)

La solution maximale y_{\max} pour la condition initiale $y_{\max}(1) = \frac{1-e}{1+e}$ est donc donnée par la même expression pour $y(x)$ mais interprétée comme fonction sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$.

iii) Soit $x_1 > x_0$ et soit $y_1 = y(x_1)$. L'expression pour $y(x)$, interprétée comme fonction sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$ est alors aussi une solution (maximale) de l'équation différentielle pour la condition initiale $y(x_1) = y_1$. De même si $x_1 < x_0$ l'expression pour $y(x)$, interprétée comme fonction sur l'intervalle $] -\infty, x_0[$ est une solution (maximale) de l'équation différentielle pour la condition initiale $y(x_1) = y_1$.

Illustration :

L'expression qui définit $y(x)$ peut aussi être utilisée pour définir une solution pour $x < x_0$. Voici le graphe des solutions maximales pour $x > x_0$ et $x < x_0$, telles que $y(1) = \frac{1-e}{1+e}$ et $y(-1) = \frac{1+e}{1-e}$.



Exercice 6. (V/F : Équations différentielles)

Q1 : Soit $y(x)$ une solution d'une équation différentielle sur un intervalle ouvert I . Alors $y(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur tout intervalle ouvert non-vide $J \subset I$.

Réponse : vrai. Si la fonction $y(x)$ est une solution d'une équation différentielle d'ordre n sur un intervalle ouvert I , elle est par définition (voir le cours) de classe C^n sur I et satisfait l'équation pour tout $x \in I$. Puisque $J \subset I$, la fonction $y(x)$ est donc aussi de classe C^n sur J et satisfait l'équation pour $x \in J$.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 1A

Échauffement.

i) La fonction $y(x) = 2$ est solution de l'équation. Pour $y \neq 2$ on a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = y - 2 &\quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y - 2} = dx &\quad \Rightarrow \quad \ln(|y - 2|) = x + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ &\quad \Rightarrow \quad y - 2 = Ce^x, \quad C \neq 0 &\quad \Rightarrow \quad y = Ce^x + 2. \end{aligned}$$

Avec $C = 0$, on a $y(x) = 2$. Ainsi la solution générale est $y(x) = Ce^x + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

ii) La fonction $y(x) = 0$ est une solution. Pour $y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -xy &\quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -xdx &\quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = -\frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ &\quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Comme le cas $C = 0$ correspond à $y(x) = 0$, la solution générale est $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

iii) La fonction $y(x) = 0$ est une solution pour $x \in]-\infty, 0[$ et pour $x \in]0, \infty[$. Si $x, y \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x} &\quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{3dx}{x} &\quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = -3\ln(|x|) + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ &\quad \Rightarrow \quad |y| = \frac{C}{|x|^3}, \quad C \neq 0 &\quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{C}{|x|^3} &\quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x^3}. \end{aligned}$$

Comme $C = 0$ mène à $y(x) = 0$, la solution générale est $y(x) = \frac{C}{x^3}$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in]-\infty, 0[$ et pour $x \in]0, \infty[$.

Exercice 1.

i) En écrivant $y' = \frac{dy}{dx}$ dans l'équation donnée, celle-ci devient

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \lambda dx.$$

On intègre alors des deux côtés et on obtient pour $x \in \mathbb{R}$

$$\ln(|y|) = \lambda x + \tilde{C} \quad \text{avec } \tilde{C} \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire

$$|y(x)| = e^{\tilde{C}} e^{\lambda x}, \quad \text{i.e.} \quad y(x) = Ce^{\lambda x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Notez qu'on peut avoir $C = 0$ (même si $e^{\tilde{C}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) parce que la fonction $y(x) = 0$ est aussi une solution de l'équation.

Remarque : Une équation différentielle de cette forme décrit une croissance (si $\lambda > 0$) ou décroissance (si $\lambda < 0$) exponentielle, un phénomène qui apparaît souvent dans la nature.

- ii) En intégrant $\frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = dx$ des deux côtés on trouve $\text{Argsh}(y) = x + C$ pour $C, x \in \mathbb{R}$.
Il s'en suit que $y(x) = \sinh(x + C)$ pour $C, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

- i) On procède par séparation des variables. En écrivant $y' = \frac{dy}{dx}$ l'équation devient

$$6(y-1)^2 dy = x(3x+4) dx,$$

d'où, par intégration des deux fonctions polynomiales,

$$2(y-1)^3 = x^3 + 2x^2 + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

La forme explicite de la solution y est donc

$$y(x) = 1 + f^{-1}\left(x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + C\right), \quad x \in I, C \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où $f^{-1}(u)$ est la fonction réciproque de $f(x) = x^3$ et I est un intervalle ouvert à définir. Comme f est bijective sur \mathbb{R} , sa fonction réciproque f^{-1} est aussi définie sur \mathbb{R} , à savoir par

$$f^{-1}(u) = \text{sgn}(u)|u|^{1/3}.$$

Cette fonction est continue sur \mathbb{R} mais elle n'est pas dérivable en $u = 0$, ce qui fait que l'équation différentielle a plusieurs solutions $y(x)$ de la même forme (1) qui sont définies sur des intervalles ouverts différents. Ces intervalles I dépendent des racines réelles du polynôme $x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + C$, chaque solution étant définie sur un intervalle ouvert sur lequel ce polynôme est du même signe.

La condition initiale $y(0) = 0$ implique que $0 = 1 + \text{sgn}(C)|C|^{1/3}$, c'est-à-dire $C = -1$. On obtient donc la solution particulière (maximale)

$$y(x) = 1 - \left|x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 1\right|^{1/3} = 1 - \sqrt[3]{1 - x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)}, \quad x \in]-\infty, x_0[,$$

où $x_0 > 0$ est l'unique solution réelle de l'équation $x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 1 = 0$.

(On peut voir que x_0 est l'unique solution et qu'elle est positive par une mini-étude de la fonction $g(x) = x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 1$.)

- ii) On applique la même méthode:

$$\begin{aligned} y y' - e^{y^2-4x} &= 0 \quad \Rightarrow \quad y e^{-y^2} dy = e^{-4x} dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}e^{-y^2} = -\frac{1}{4}e^{-4x} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad e^{-y^2} &= \frac{1}{2}e^{-4x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y^2 = -\ln\left(\left(\frac{1}{2}e^{-4x} + C\right)\right), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En fait, la constante C ne peut pas prendre toutes les valeurs dans \mathbb{R} parce que $y^2 \geq 0$ et le logarithme doit être définie. Mais comme on ne s'intéresse pas à la solution générale ici, il n'est pas nécessaire de trouver le domaine exact de C , il suffira de trouver la valeur de C à partir de la condition initiale et puis le domaine de x en fonction.

La forme explicite de la solution y est alors

$$y(x) = \pm \sqrt{-\ln\left(\frac{1}{2}e^{-4x} + C\right)}.$$

La condition initiale $y(0) = \sqrt{\ln(2)}$ implique que le signe est positif, et, de plus,

$$\sqrt{\ln(2)} = +\sqrt{-\ln\left(\frac{1}{2} + C\right)} \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

La solution particulière pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = \sqrt{4x + \ln(2)}$$

qui est à priori définie pour $x \geq -\frac{\ln(2)}{4}$. Or, $y'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x + \ln(2)}}$ n'est pas définie en $x = -\frac{\ln(2)}{4}$. La solution maximale pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = \sqrt{4x + \ln(2)}, \quad x \in \left] -\frac{\ln(2)}{4}, \infty \right[.$$

Exercice 3.

i) Pour $\varepsilon = 0$, la solution maximale est $y_0(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$ on utilise la séparation des variables

$$\frac{dy}{dx} = y^{1+\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y^{1+\varepsilon}} = dx,$$

ce qui donne, après intégration, la solution générale

$$-\frac{1}{\varepsilon y^\varepsilon} = x + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale implique que

$$-\frac{1}{\varepsilon} = C.$$

Ainsi

$$y^{-\varepsilon} = -\varepsilon \left(x - \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

et la solution particulière recherchée est donc

$$y_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad x \in \left] -\infty, \frac{1}{\varepsilon} \right[.$$

(L'intervalle de définition pour x s'obtient à partir du fait que $1 - \varepsilon x$ doit être positif.)

ii) On a vu que le domaine de définition de y_ε pour $\varepsilon > 0$ est $\left] -\infty, \frac{1}{\varepsilon} \right[$ et que celui de y_0 est \mathbb{R} . Donc si $b \leq 0$, l'intervalle A est dans le domaine de définition de y_ε pour tout $\varepsilon \geq 0$ et $\varepsilon_0 = \infty$. Si $b > 0$, l'intervalle A est dans le domaine de définition de y_ε pour autant que $b < \frac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{1}{b}$.

iii) Pour montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |y_\varepsilon(x) - y_0(x)| = 0$, il suffit de montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) = y_0(x)$.
On a que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} \ln(1 - \varepsilon x) \right]. \end{aligned}$$

Comme la fonction exponentielle est continue, on peut échanger l'évaluation de la fonction et la limite et l'on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) = \exp \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln(1 - \varepsilon x)}{\varepsilon} \right) \right].$$

Puisque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(1 - \varepsilon x) = \ln(1) = 0$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0$, on peut appliquer Bernoulli-l'Hospital¹ pour calculer la limite, ce qui donne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) = \exp \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{\frac{-x}{1-\varepsilon x}}{1} \right) \right] = \exp \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \varepsilon x} \right] = \exp(x) = y_0(x).$$

Exercice 4.

On récrit l'équation

$$\frac{dy}{dt} = y(a - by) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y(a - by)} = dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y(a - by)} = \int dt$$

On décompose le terme de gauche en éléments simples :

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{a - by} = \frac{A(a - by) + By}{y(a - by)} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = A(a - by) + By = Aa - (Ab - B)y,$$

donc $A = \frac{1}{a}$ et $B = \frac{b}{a}$. Ainsi

$$\int \frac{1}{y(a - by)} dy = \int \frac{1}{ay} dy + \int \frac{b}{a(a - by)} dy = \frac{1}{a} \ln(|y|) - \frac{1}{a} \ln(|a - by|),$$

et donc on a pour $C > 0$

$$\frac{1}{a} \ln(|y|) - \frac{1}{a} \ln(|a - by|) = t + \ln(C) \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{y}{a - by} \right|^{1/a} = Ce^t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{a - by} = \pm C^a e^{at}$$

On pose alors $C^* := \pm C^a \in \mathbb{R}^*$ et on continue

$$\begin{aligned} \frac{y}{a - by} = C^* e^{at} &\Leftrightarrow y = C^* e^{at} (a - by) \Leftrightarrow y(1 + bC^* e^{at}) = aC^* e^{at} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{aC^* e^{at}}{1 + bC^* e^{at}} = \frac{aC^*}{e^{-at} + bC^*} = \frac{a}{\frac{e^{-at}}{C^*} + b} = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{e^{-at}}{bC^*}} \end{aligned}$$

On détermine la valeur de C^* pour condition initiale $y(0) = y_0$:

$$y(0) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{1}{bC^*}} = \frac{aC^*}{bC^* + 1} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad aC^* = y_0(bC^* + 1) \quad \Leftrightarrow \quad C^* = \frac{y_0}{a - by_0}$$

¹En général il est préférable d'éviter la règle de Bernoulli-l'Hospital et d'utiliser les développements limités. On a (formule de Taylor avec reste) que $\ln(1 + z) = z + \mathcal{O}(z)$ autour de $z = 0$, ce qui donne que $\frac{\ln(1 - \varepsilon x)}{\varepsilon} = -x + \frac{\mathcal{O}(\varepsilon x)}{\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, d'où le résultat. De plus, dans le présent cas, on aurait d'ailleurs aussi pu utiliser directement que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon x}} \right)^x = e^x.$$

La solution cherchée est donc

$$y(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{e^{-at}(a-by_0)}{by_0}} = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{a}{by_0} - 1\right)e^{-at}}$$

comme vu au cours.

Noter que pour les conditions initiales $y_0 = 0$ ou $y_0 = \frac{a}{b}$, les solutions de l'équation différentielle sont des fonctions constantes, à savoir $y(t) = 0$ et $y(t) = \frac{a}{b}$ respectivement.

La croissance de la solution $y(t)$ est déterminée par le facteur $\lambda := \frac{a}{by_0} - 1$ devant l'exponentielle. Si $y_0 > \frac{a}{b}$, alors $\lambda < 0$ et donc $y(t)$ est décroissante. Si $y_0 < \frac{a}{b}$ on a $\lambda > 0$ et $y(t)$ est croissante. Puisque $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{a}{b}$, la droite $y = \frac{a}{b}$ est une asymptote horizontale et n'est donc jamais intersectée par $y(t)$.

Exercice 5.

Observons d'abord que les fonctions constantes $y(x) = 0$ et $y(x) = 1$ sont des solutions pour $x \in \mathbb{R}$.

Si $x, y \neq 0$ et $x, y \neq 1$, l'équation différentielle donnée s'écrit

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x(x-1)},$$

puis, en décomposant chaque terme en éléments simples:

$$\left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) dy = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx.$$

En intégrant les deux côtés on obtient

$$\begin{aligned} -\ln|y| + \ln|y-1| &= -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln(\tilde{C}), \quad \tilde{C} > 0, \\ \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \ln(\tilde{C}) \quad \tilde{C} > 0, \\ \Leftrightarrow \left|\frac{y-1}{y}\right| &= \tilde{C} \left|\frac{x-1}{x}\right| \quad \tilde{C} > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

L'équation (2) est équivalente à

$$\frac{y-1}{y} = C \frac{x-1}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{3}$$

car, si un couple (x, y) satisfait l'équation (2) pour un certain \tilde{C} , il satisfait aussi l'équation (3) avec $C = \tilde{C}$ ou $C = -\tilde{C}$, et si un couple (x, y) satisfait l'équation (3) pour un certain C , il satisfait aussi l'équation (2) pour $\tilde{C} = |C|$.

A partir de (3) on trouve l'expression explicite de y en fonction de x ,

$$Cy(x-1) = x(y-1) \quad \Rightarrow \quad y(Cx - C - x) = -x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{x}{(1-C)x + C}.$$

Pour $C \neq 0$ et $C \neq 1$ la fonction $y(x)$ définit deux solutions, une sur l'intervalle $]-\infty, \frac{C}{C-1}[$ et une sur l'intervalle $]\frac{C}{C-1}, \infty[$. (Le dénominateur de y s'annule en $x = \frac{C}{C-1}$ dans ce cas.)

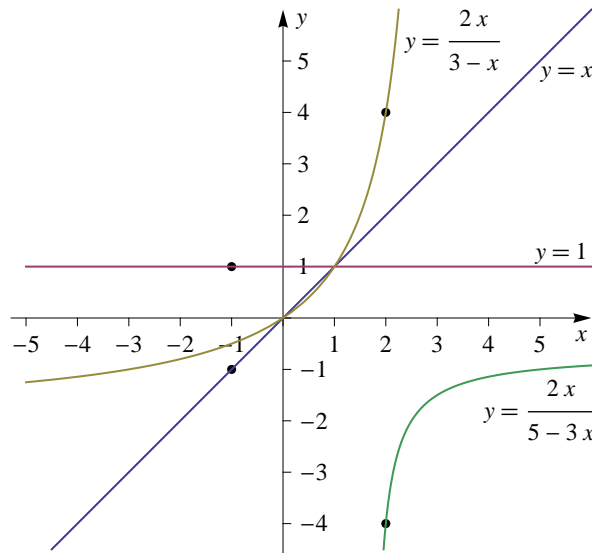
Pour $C = 0$, on a $y(x) = 1$ et pour $C = 1$, on a $y(x) = x$. Tout comme la solution triviale $y(x) = 0$, ces deux solutions sont définies pour $x \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation donnée est donc

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{x}{(1-C)x+C}, & C \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, & & x \in]-\infty, \frac{C}{C-1}[\text{ ou } x \in]\frac{C}{C-1}, \infty[. \\
 y(x) &= 1, & C = 0, & & x \in \mathbb{R}, \\
 y(x) &= x, & C = 1, & & x \in \mathbb{R}, \\
 y(x) &= 0, & - & & x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Pour trouver les solutions particulières pour les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ données, on met la condition initiale dans la solution générale et on résout pour C . Les solutions sont:

$$\begin{aligned}
 x_0 = -1, y_0 = -1 & \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = x, & x \in \mathbb{R} \\
 x_0 = -1, y_0 = 1 & \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = 1, & x \in \mathbb{R} \\
 x_0 = 2, y_0 = 4 & \Rightarrow C = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{2x}{3-x}, & x \in]-\infty, 3[^* \\
 x_0 = 2, y_0 = -4 & \Rightarrow C = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{2x}{5-3x}, & x \in]\frac{5}{3}, \infty[^*
 \end{aligned}$$

*On a choisi l'intervalle qui contient x_0 .



Graph des solutions (les points correspondent aux conditions initiales):

Exercice 6.

La fonction $u(t)$ qui satisfait pour $t \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$u' + u^2 \sin(t) = 0$$

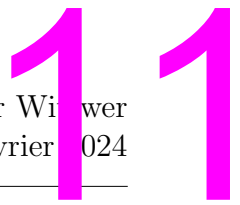
avec la condition initiale $u(0) = \frac{1}{4}$ vérifie aussi :

$u(\pi) = \frac{1}{2}$

$u(\pi) = \frac{e^2}{4}$

$u(\pi) = \frac{1}{6}$

$u(\pi) = \frac{1}{4e^2}$



Analyse avancée II – Corrigé de la série 1B

RÉVISION CALCUL PROPOSITIONNEL

Une “proposition (logique)” est un énoncé qui peut être vrai ou faux (mais pas les deux à la fois). Soit p et q des propositions. Par les tableaux de vérité suivants, on introduit les opérations \neg (“non” logique), \wedge (“et” logique), \vee (“ou” logique), \Leftrightarrow (l’équivalence logique) et \Rightarrow (l’implication logique), où $V :=$ vrai, et $F :=$ faux.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exercice 1. (Equivalences logiques)

Tous les propositions de cet exercice se montrent par la construction des tableaux de vérité à partir des tableaux de vérité des définitions :

i)

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

ii)

p	p	$p \wedge p$
V	V	V
F	F	F

 et

p	p	$p \vee p$
V	V	V
F	F	F

iii)

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

 et

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

iv)

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

 et

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

v)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

et

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

vi)

p	q	$p \wedge q$	r	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

et

p	q	$p \vee q$	r	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

vii)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

viii)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

ix)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

x)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

xi)

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
V	V	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Exercice 2. (Les quantificateurs \forall et \exists , une variable)

v) Soit $E = \{1, 2\}$ et $p(x)$ et $q(x)$ telles que $p(1)$ et $q(2)$ sont vraies et $p(2)$ et $q(1)$ sont fausses. Alors, on a

$p(1)$	$p(2)$	$q(1)$	$q(2)$	$p(1) \vee q(1)$	$p(2) \vee q(2)$
V	F	F	V	V	V

et par conséquence

$\forall x \in E, p(x)$	$\forall x \in E, q(x)$	$\forall x \in E$ $p(x) \vee q(x)$	$\forall x \in E, p(x)$ \vee $\forall x \in E, q(x)$
F	F	V	F

et donc en effet

$\forall x \in E$ $p(x) \vee q(x)$	\Leftarrow	$\forall x \in E, p(x)$ \vee $\forall x \in E, q(x)$	\Rightarrow	$\forall x \in E, p(x)$ \vee $\forall x \in E, q(x)$
V				F

vi) Similairement on a

$p(1)$	$p(2)$	$q(1)$	$q(2)$	$p(1) \wedge q(1)$	$p(2) \wedge q(2)$
V	F	F	V	F	F

et par conséquence

$\exists x \in E, p(x)$	$\exists x \in E, q(x)$	$\exists x \in E$ $p(x) \wedge q(x)$	$\exists x \in E, p(x)$ \wedge $\exists x \in E, q(x)$
V	V	F	V

et donc en effet

$\exists x \in E$ $p(x) \wedge q(x) \implies$	$\exists x \in E, p(x)$ \wedge $\exists x \in E, q(x)$	$\exists x \in E$ $p(x) \wedge q(x) \iff$	$\exists x \in E, p(x)$ \wedge $\exists x \in E, q(x)$
V		F	

Exercice 3. (Les quantificateurs \forall et \exists , deux variables)

iii) Soit $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2\}$ et $p(x, y)$ telle que $p(1, 1)$ et $p(2, 2)$ sont vraies et $p(1, 2)$ et $p(2, 1)$ sont fausses. Alors

$p(1, 1)$	$p(1, 2)$	$p(2, 1)$	$p(2, 2)$	$\exists x \in E, \forall y \in F$ $p(x, y)$	$\forall y \in F, \exists x \in E$ $p(x, y)$
V	F	F	V	F	V

et donc en effet

$\exists x \in E, \forall y \in F$ $p(x, y) \implies$	$\forall y \in F, \exists x \in E$ $p(x, y)$	$\exists x \in E, \forall y \in F$ $p(x, y) \iff$	$\forall y \in F, \exists x \in E$ $p(x, y)$
V		F	

RÉVISION ENSEMBLES

Exercice 4. (Notion de couple)

i) On a $X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$. Le couple $(3, 2)$ n'est donc pas un élément du produit cartésien $X \times Y$.

ii) En utilisant la définition du produit cartésien, on trouve que les deux ensembles sont

$$\begin{aligned} (X \times Y) \times Z &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \times \{5, 6\} \\ &= \{((1, 3), 5), ((1, 4), 5), ((2, 3), 5), ((2, 4), 5), ((1, 3), 6), \\ &\quad ((1, 4), 6), ((2, 3), 6), ((2, 4), 6)\} , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X \times (Y \times Z) &= \{1, 2\} \times \{(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\} \\ &= \{(1, (3, 5)), (1, (3, 6)), (1, (4, 5)), (1, (4, 6)), (2, (3, 5)), \\ &\quad (2, (3, 6)), (2, (4, 5)), (2, (4, 6))\} . \end{aligned}$$

Ils ne sont donc pas égaux.

Remarque:

Les deux ensembles $(X \times Y) \times Z$ et $X \times (Y \times Z)$ sont équivalents dans le sens que la fonction qui associe à $((a, b), c) \in (X \times Y) \times Z$ l'élément $(a, (b, c)) \in X \times (Y \times Z)$ est bijective. On écrit donc souvent simplement $X \times Y \times Z$ au lieu de $(X \times Y) \times Z$ ou $X \times (Y \times Z)$, et (a, b, c) au lieu de $((a, b), c)$ ou $(a, (b, c))$.

Exercice 5. (Relation d'équivalence)

- i)* Par définition de la réflexivité d'une relation d'équivalence on a $x \sim x$ et donc $x \in C_x$. De même, si $x \sim y$, alors si $z \sim x$ on a par la transitivité d'une relation d'équivalence aussi $z \sim y$ et donc $z \in C_y$ si $z \in C_x$ et vice versa. Finalement, par l'absurde, supposons que x et y ne sont pas équivalents alors z ne peut pas être à la fois dans C_x et C_y , car sinon à la fois $z \sim x$ et $z \sim y$ et donc $x \sim y$ par la transitivité ce qui est une contradiction.
- ii)* On a $x \sim x$ car $x = x$; $x \sim y$ implique $y \sim x$ car $x = y$ implique $y = x$; et $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent que $x \sim z$ car $x = y$ et $y = z$ impliquent que $x = z$. L'égalité $=$ est donc un cas particulier d'une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences, c'est-à-dire les ensembles qui sont les éléments de X/\sim , contiennent chacune exactement un élément de X . Similairement, dans le deuxième cas, puisque $x \sim y$ pour tout $x, y \in X$, les conditions d'une relation d'équivalence sont trivialement satisfaites. L'ensemble quotient X/\sim contient l'ensemble X comme unique élément.
- iii)* Pour tout $x \in \mathbb{Z}^*$ on a $x^2 > 0$ et donc $x \sim x$. Si $xy > 0$ on a aussi $yx > 0$, si bien que $x \sim y$ implique $y \sim x$. Finalement, si $xy > 0$ et $yz > 0$ on a que $0 < (xy)(yz) = xzy^2$. Il s'en suit que $xz > 0$ si bien que $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent $x \sim z$. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient contient deux éléments, l'ensemble des entiers positifs et l'ensemble des entiers négatifs.
- iv)* Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a $x - x = 0$. Puisque 0 est un nombre pair il s'en suit que $x \sim x$. Si $x - y$ est un nombre pair, $y - x$ est aussi un nombre pair et $x \sim y$ implique donc $y \sim x$. Finalement, si $x - y$ est pair et $y - z$ est pair, il s'en suit que $x - z = (x - y) + (y - z)$ est pair, et $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent donc que $x \sim z$. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient contient deux éléments, l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs.
- v)* La relation $x \sim y$ si $x - y$ impair ne définit pas une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} . Pour tout x on a que $x - x = 0$, et puisque 0 est un nombre pair il en suit que x n'est pas en relation avec x ce qui viole la condition de réflexivité. (La relation est symétrique, mais la transitivité est aussi compromise.)

Analyse avancée II – Corrigé de la série 2A

Notation: Dans ce corrigé, l'équation quadratique en λ qui apparaît dans le § 1.5.2 du cours est appelée l'équation caractéristique de l'équation différentielle correspondante.

Échauffement 1.

- i) $\{\forall C \in \mathbb{R}, y(x) = C, x \in \mathbb{R}\}$
- ii) $\{\forall C \in \mathbb{R}, y(x) = x + C, x \in \mathbb{R}\}$
- iii) $\{\forall C \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{-x}, x \in \mathbb{R}\}$
- iv) $\{\forall C \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^x, x \in \mathbb{R}\}$

Échauffement 2.

- i) $\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y(x) = C_1x + C_2, x \in \mathbb{R}\}$
- ii) $\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2, x \in \mathbb{R}\}$
- iii) $\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), x \in \mathbb{R}\}$
- iv) $\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y(x) = C_1 \cosh(x) + C_2 \sinh(x), x \in \mathbb{R}\}$ ou encore
 $\{\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, x \in \mathbb{R}\}$

Échauffement 3. La solution recherchée est $y(x) = \frac{1}{2}x \sin(x) + \sin(x)$.

Exercice 1.

Dans cet exercice il s'agit d'équations différentielles linéaires du premier ordre. D'après le cours toute solution $y(x)$ de ce type d'équation s'écrit

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x),$$

où $y_{\text{hom}}(x)$ est la solution générale de l'équation homogène associée (i.e. sans second membre) et $y_{\text{part}}(x)$ est une solution particulière de l'équation initiale.

- i) La solution générale de l'équation homogène s'obtient en séparant les variables (cf. cours). On obtient

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-\int(-\sin(x))dx} = Ce^{-\cos(x)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète (i.e. avec second membre), on utilise la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire on pose

$$y_{\text{part}}(x) = C(x)e^{-\cos(x)}.$$

On a alors

$$y'_{\text{part}}(x) = [C'(x) + C(x) \sin(x)] e^{-\cos(x)}$$

et on peut écrire l'équation avec second membre pour y_{part} :

$$\begin{aligned} [C'(x) + C(x) \sin(x)] e^{-\cos(x)} - \sin(x) C(x) e^{-\cos(x)} &= 4 \sin(x) e^{\cos(x)} \\ \Leftrightarrow C'(x) e^{-\cos(x)} &= 4 \sin(x) e^{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Par conséquent $C'(x) = 4 \sin(x) e^{2\cos(x)}$ et en intégrant on trouve $C(x) = -2e^{2\cos(x)}$. Notons qu'une éventuelle constante d'intégration de cette étape serait combinée avec la constante de la solution de l'équation homogène, donc il n'y a pas besoin d'ajouter une constante ici.

Ainsi $y_{\text{part}}(x) = -2e^{\cos(x)}$ et la solution générale de l'équation différentielle complète est

$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = C e^{-\cos(x)} - 2e^{\cos(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ implique que $C - 2 = 1$, d'où $C = 3$. La solution pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = 3e^{-\cos(x)} - 2e^{\cos(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) A cause du logarithme dans l'équation, on a $x > 0$, et donc l'équation donnée est équivalente à

$$y' - \frac{1}{x} y = 4 \ln(x).$$

Comme solution de l'équation homogène, on trouve

$$y_{\text{hom}}(x) = C e^{-\int -\frac{1}{x} dx} = C e^{\ln(x)} = C x, \quad x > 0, C \in \mathbb{R}.$$

Par la méthode de variation de la constante, on pose $y_{\text{part}}(x) = C(x) x$ et en mettant cette expression dans l'équation initiale on trouve que $C'(x) = \frac{4 \ln(x)}{x}$. En intégrant on trouve

$$C(x) = 4 \int \frac{\ln(x)}{x} dx = 4 \int [\ln(x)]' \ln(x) dx = 2 \ln(x)^2.$$

Il n'y a de nouveau pas de constante d'intégration à cette étape. Par conséquent

$$y_{\text{part}}(x) = 2x \ln(x)^2,$$

d'où la solution générale

$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = (C + 2 \ln(x)^2) x, \quad x \in]0, \infty[.$$

La solution pour la condition initiale $y(1) = 1$ est

$$y(x) = (1 + 2 \ln(x)^2) x, \quad x \in]0, \infty[.$$

Exercice 2.

Dans cet exercice il s'agit d'équations différentielles linéaires du premier ordre. D'après le cours toute solution $y(x)$ de ce type d'équation s'écrit

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x),$$

où $y_{\text{hom}}(x)$ est la solution générale de l'équation homogène associée (i.e. sans second membre) et $y_{\text{part}}(x)$ est une solution particulière de l'équation initiale.

- i) La solution générale de l'équation homogène s'obtient en séparant les variables (cf. cours). On obtient

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{3x}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Comme la fonction $p(x) = -3$ est constante, on peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour chercher une solution particulière. Cette méthode est souvent plus rapide que la méthode de variation de la constante.

Ici $q(x) = 10 \cos(x) + 2e^{3x}$ et $q'(x) = -10 \sin(x) + 6e^{3x}$. Les termes à inclure dans y_{part} sont donc $\cos(x)$ et $\sin(x)$ qui ne sont pas solutions de l'équation homogène, ainsi que xe^{3x} car e^{3x} est solution de l'équation homogène. Donc on pose

$$y_{\text{part}}(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + Dxe^{3x}.$$

En reportant cette expression et sa dérivée dans l'équation complète, on obtient

$$\begin{aligned} [A \cos(x) + B \sin(x) + Dxe^{3x}]' - 3(A \cos(x) + B \sin(x) + Dxe^{3x}) &= 10 \cos(x) + 2e^{3x} \\ \Leftrightarrow (B - 3A) \cos(x) - (A + 3B) \sin(x) + De^{3x} &= 10 \cos(x) + 2e^{3x}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$B - 3A = 10, \quad A + 3B = 0 \quad \text{et} \quad D = 2.$$

On a donc finalement $A = -3$, $B = 1$, $D = 2$ et ainsi

$$y_{\text{part}}(x) = -3 \cos(x) + \sin(x) + 2xe^{3x}.$$

Par conséquent

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = Ce^{3x} - 3 \cos(x) + \sin(x) + 2xe^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De plus on a $C = 3$ pour la condition initiale $y(0) = 0$. Donc la solution est

$$y(x) = 3e^{3x} - 3 \cos(x) + \sin(x) + 2xe^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- ii) On a $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Pour trouver y_{part} , on utilise encore une fois la méthode des coefficients indéterminés. Les dérivées de $q(x) = x^3$ sont constituées des termes $1, x, x^2$ dont aucun n'est solution de l'équation homogène, de même que $q(x)$ lui-même. Ainsi $y_{\text{part}}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Dx + E$ est un polynôme de degré 3 et on a

$$y'_{\text{part}} + y_{\text{part}} = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + D)x + D + E = x^3,$$

ce qui mène à

$$\begin{aligned} A = 1, \quad 3A + B = 0, \quad 2B + D = 0 \quad \text{et} \quad D + E = 0 \\ \Leftrightarrow A = 1, \quad B = -3, \quad D = 6 \quad \text{et} \quad E = -6. \end{aligned}$$

Ainsi $y_{\text{part}}(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$ et

$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = Ce^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour la condition initiale $y(0) = -2$, on obtient $C = 4$ si bien que la solution est

$$y(x) = 4e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. (V/F : Équations différentielles linéaires du premier ordre)

Q1: Soit $y(x)$ une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur un intervalle ouvert I . Alors pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y_1(x) = y(x) + C$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I .

Réponse : faux. *Contre-exemple : L'équation $y' - y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur $I = \mathbb{R}$. La fonction $y(x) = \exp(x)$ est une solution de cette équation, mais la fonction $y_1(x) = y(x) + 1 = \exp(x) + 1$ n'est pas solution, car $y_1'(x) - y_1(x) = -1 \neq 0$.*

Q2: Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sur un intervalle ouvert I . Alors la différence $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I .

Réponse : vrai. *Une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre est de la forme $y' + p(x)y = 0$. Avec $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ on trouve*

$$\begin{aligned} y'(x) + p(x)y(x) &= (y_1'(x) - y_2'(x)) + p(x)(y_1(x) - y_2(x)) \\ &= [y_1'(x) + p(x)y_1(x)] - [y_2'(x) + p(x)y_2(x)] \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

(Remarque: Avec la notation compacte du cours on a $Ly_1 = 0$ et $Ly_2 = 0$ et donc, puisque L est une application linéaire, $L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = 0 - 0 = 0$.)

Q3: Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur un intervalle ouvert I . Alors la différence $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I .

Réponse : faux. *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme $y' + p(x)y = q(x)$. Avec $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ on trouve*

$$\begin{aligned} y'(x) + p(x)y(x) &= (y_1'(x) - y_2'(x)) + p(x)(y_1(x) - y_2(x)) \\ &= [y_1'(x) + p(x)y_1(x)] - [y_2'(x) + p(x)y_2(x)] \\ &= q(x) - q(x) = 0. \end{aligned}$$

Donc $y(x)$ n'est pas solution de l'équation si $q(x)$ n'est pas identiquement zéro. (Remarque: Avec la notation compacte du cours on a $Ly_1 = q$ et $Ly_2 = q$ et donc, puisque L est une application linéaire, $L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = q - q = 0 \neq q$.)

Exercice 4.

Pour résoudre ces équations homogènes on utilise la méthode avec l'équation caractéristique proposée dans le cours (§1.5.2).

i) L'équation caractéristique $3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ admet les racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, d'où la solution générale

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{3}x}, \quad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- ii) L'équation caractéristique $3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$ admet les racines complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}(2 \pm \sqrt{2}i)$, d'où la solution générale

$$y(x) = \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right) \right) e^{\frac{2}{3}x}, \quad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- iii) L'équation caractéristique $3\lambda^2 - 4\lambda + \frac{4}{3} = 0$ admet la racine double $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3}$. Ainsi un terme de la solution générale est $y_1(x) = e^{\frac{2}{3}x}$ mais il faut en trouver un deuxième (comme c'est une équation du deuxième ordre, les solutions générales sont dans un espace vectoriel de dimension 2). On utilise la méthode de la variation de la constante, c.-à-d. on pose

$$y_2(x) = C(x)y_1(x).$$

Comme

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= C'(x)y_1(x) + C(x)y_1'(x) = (C'(x) + \lambda C(x))e^{\lambda x} \\ y_2''(x) &= C''(x)y_1(x) + 2C'(x)y_1'(x) + C(x)y_1''(x) = (C''(x) + 2\lambda C'(x) + \lambda^2 C(x))e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

l'équation différentielle pour y_2 s'écrit (en divisant par $e^{\lambda x}$)

$$\begin{aligned} 3(C''(x) + 2\lambda C'(x) + \lambda^2 C(x)) - 4(C'(x) + \lambda C(x)) + \frac{4}{3}C(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3C''(x) + (6\lambda - 4)C'(x) &= 0 \quad \Leftrightarrow C''(x) = 0, \end{aligned}$$

où on a d'abord utilisé que $3\lambda^2 - 4\lambda + \frac{4}{3} = 0$ et puis que $\lambda = -\frac{-4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$. Ainsi $C(x) = x$ (on peut ignorer les constantes d'intégration) et donc $y_2(x) = x e^{\frac{2}{3}x}$, d'où la solution générale

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{2}{3}x}, \quad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.

Ces équations différentielles sont non-homogènes. La solution générale est donc la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (1^{ère} étape de résolution) et d'une solution particulière de l'équation complète (2^e étape).

- i) L'équation caractéristique $\lambda^2 + 4 = 0$ admet les racines complexes $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ si bien que la solution générale de l'équation homogène associée est

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Cherchons une solution particulière par la méthode des coefficients indéterminés. Comme $q(x) = 3e^{2x}$ n'est pas solution de l'équation homogène et que toutes ses dérivées sont multiples de e^{2x} , on cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme $y_{\text{part}} = Ae^{2x}$. Donc

$$y_{\text{part}}'' + 4y_{\text{part}} = 3e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad (4A + 4A)e^{2x} = 3e^{2x},$$

c'est-à-dire $A = \frac{3}{8}$ et $y_{\text{part}}(x) = \frac{3}{8}e^{2x}$. La solution générale est donc

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{3}{8}e^{2x}, \quad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) Comme au point i), on a $y_{\text{hom}}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$. Le membre de droite $q(x) = 5 \cos(2x)$ est solution de l'équation homogène tandis $xq(x)$ ne l'est pas. On cherche donc un solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}} = Ax \cos(2x) + Bx \sin(2x) .$$

En reportant cette expression dans l'équation complète, on obtient

$$\begin{aligned} y_{\text{part}}'' + 4y_{\text{part}} &= 5 \cos(2x) && \Leftrightarrow \\ 4(B - Ax) \cos(2x) - 4(A + Bx) \sin(2x) + 4Ax \cos(2x) + 4Bx \sin(2x) &= 5 \cos(2x) \\ \Leftrightarrow & 4B \cos(2x) - 4A \sin(2x) = 5 \cos(2x) , \end{aligned}$$

c'est-à-dire $A = 0$ et $B = \frac{5}{4}$. Ainsi $y_{\text{part}}(x) = \frac{5}{4}x \sin(2x)$ et la solution générale devient

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{5}{4}x \sin(2x) , \quad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

iii) Comme $\lambda^2 + 1 = 0$ admet les racines $\lambda_{1,2} = \pm i$, on trouve $y_{\text{hom}}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$. Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de la variation des constantes:

$$y_{\text{part}} = C_1(x) \cos(x) + C_2(x) \sin(x) .$$

Selon le cours, les dérivées C_1' et C_2' satisfont le système linéaire

$$\begin{cases} C_1' \cos(x) + C_2' \sin(x) = 0 \\ -C_1' \sin(x) + C_2' \cos(x) = \frac{1}{\sin(x)} \end{cases}$$

dont les solutions sont $C_1' = -1$ et $C_2' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. En intégrant ces expressions, on obtient $C_1 = -x$ et $C_2 = \ln(|\sin(x)|)$ et ainsi $y_{\text{part}}(x) = -x \cos(x) + \sin(x) \ln(|\sin(x)|)$.

La solution générale est donc

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - x \cos(x) + \sin(x) \ln(|\sin(x)|) ,$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et $x \in]0, \pi[$.

Remarque 1: $y(x)$ est solution de l'ED sur tous les intervalles $]k\pi, k\pi + \pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 2: $y(x)$ peut être prolongée par continuité sur tout \mathbb{R} , mais elle ne sera pas de classe $C^2(\mathbb{R})$.

Exercice 6.

i) L'équation caractéristique de cette équation est $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ qui admet les racines $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$.

Ainsi la solution générale de l'équation donnée est

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} .$$

ii) Méthode 1: Coefficients indéterminés

Le membre de droite est $q(x) = 5 \sin(3x)$ qui n'est pas solution de l'équation homogène associée. On cherche donc une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}} = A \sin(3x) + B \cos(3x) .$$

En reportant y_{part} dans l'équation différentielle on a

$$y_{\text{part}}'' + 2y_{\text{part}}' - 3y_{\text{part}} = (-12A - 6B) \sin(3x) + (6A - 12B) \cos(3x) = 5 \sin(3x) .$$

Les solutions du système linéaire

$$\begin{aligned} -12A - 6B &= 5 \\ 6A - 12B &= 0 \end{aligned}$$

sont $A = -\frac{1}{3}$ et $B = -\frac{1}{6}$, et la solution particulière de l'équation donnée est donc

$$y_{\text{part}}(x) = -\frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{6} \cos(3x) .$$

Méthode 2: Variation des constantes

On pose

$$y_{\text{part}} = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-3x}$$

D'après le cours, les fonctions C_1 et C_2 satisfont le système

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - 3C_2'(x)e^{-3x} = 5 \sin(3x) \end{cases}$$

qui a comme solution

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \sin(3x) \end{pmatrix} = \frac{e^{2x}}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-3x} & e^{-3x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \sin(3x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{4} \begin{pmatrix} e^{-x} \sin(3x) \\ -e^{3x} \sin(3x) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Ainsi

$$C_1(x) = \frac{5}{4} \int e^{-x} \sin(3x) dx \quad \text{et} \quad C_2(x) = -\frac{5}{4} \int e^{3x} \sin(3x) dx . \quad (1)$$

On calcule $\int \sin(3x)e^{ax} dx$ en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned} \int \sin(3x)e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(3x) - \frac{1}{a} \int 3 \cos(3x)e^{ax} dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(3x) - \frac{3}{a^2} e^{ax} \cos(3x) - \frac{3}{a^2} \int 3 \sin(3x)e^{ax} dx , \end{aligned}$$

d'où, en isolant l'intégrale,

$$\left(1 + \frac{9}{a^2}\right) \int \sin(3x)e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(3x) - \frac{3}{a^2} e^{ax} \cos(3x) ,$$

et finalement

$$\int \sin(3x)e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 9} (a \sin(3x) - 3 \cos(3x)). \quad (2)$$

En combinant (??) et (??), on trouve

$$C_1(x) = -\frac{1}{8} e^{-x} (\sin(3x) + 3 \cos(3x)) \quad (a = -1)$$

$$C_2(x) = -\frac{5}{24} e^{3x} (\sin(3x) - \cos(3x)) \quad (a = 3)$$

et la solution particulière est donc

$$y_{\text{part}}(x) = -\frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{6} \cos(3x).$$

iii) La solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{6} \cos(3x), \quad x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour satisfaire les conditions initiales on doit avoir

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{6} = 1$$

$$y'(0) = C_1 - 3C_2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

Les solutions de ce système sont $C_1 = 1$ et $C_2 = \frac{1}{6}$ si bien que

$$y(x) = e^x + \frac{1}{6} e^{-3x} - \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{6} \cos(3x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.

i) L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $m\lambda^2 + \alpha\lambda + \varepsilon = 0$ qui a comme racines

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4m\varepsilon}}{2m} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4m\varepsilon}}{2m}$$

On doit distinguer trois cas selon le signe du discriminant:

- Si $\alpha^2 - 4m\varepsilon > 0$, c.-à-d. si $\alpha > 2\sqrt{m\varepsilon}$ la solution générale est

$$y_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2m} t\right) \left(C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4m\varepsilon}}{2m} t\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4m\varepsilon}}{2m} t\right) \right)$$

- Si $\alpha^2 - 4m\varepsilon < 0$, c.-à-d. si $0 < \alpha < 2\sqrt{m\varepsilon}$ les racines sont complexes

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm i \frac{\sqrt{4m\varepsilon - \alpha^2}}{2m} = x \pm iy$$

et donc la solution générale est

$$\begin{aligned} y_{\text{hom}}(t) &= C_1 e^{xt} \cos(yt) + C_2 e^{xt} \sin(yt) \\ &= \exp\left(-\frac{\alpha}{2m} t\right) \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4m\varepsilon - \alpha^2}}{2m} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4m\varepsilon - \alpha^2}}{2m} t\right) \right) \end{aligned}$$

- Si $\alpha = 2\sqrt{m\varepsilon}$, on a une racine double $\lambda = -\frac{\alpha}{2m} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$. La solution générale de l'équation homogène est alors

$$y_{\text{hom}}(t) = C_1 e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}t} + C_2 t e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}t}$$

ii) Lorsque $t \rightarrow \infty$ on a $y_{\text{hom}}(t) \rightarrow 0$ pour les trois cas. En effet,

- Dans le premier cas on a $\frac{\alpha}{2m} > \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4m\varepsilon}}{2m} > 0$, si bien que le premier facteur de y_{hom} domine le terme croissant qui multiplie C_1 .
- Evident car les fonctions cos et sin sont bornées.
- Comme la fonction exponentielle grandit plus vite que les polynômes, on a $t e^{-\lambda t} \rightarrow 0$ pour tout $\lambda > 0$.

iii) On met y_{part} dans l'équation non-homogène. Comme

$$\begin{aligned} y_{\text{part}}'(t) &= A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t) \\ y_{\text{part}}''(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \left[-mA\omega^2 - \alpha B\omega + \varepsilon A \right] \sin(\omega t) + \left[-mB\omega^2 + \alpha A\omega + \varepsilon B \right] \cos(\omega t) &= H \sin(\omega t) \\ \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon - m\omega^2 & -\alpha\omega \\ \alpha\omega & \varepsilon - m\omega^2 \end{pmatrix}}_{=:J} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} \varepsilon - m\omega^2 & \alpha\omega \\ -\alpha\omega & \varepsilon - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} H(\varepsilon - m\omega^2) \\ -H\alpha\omega \end{pmatrix}$$

et donc (on ne s'amuse pas à calculer $\det(J)$...)

$$y_{\text{part}}(t) = \frac{H}{\det(J)} \left((\varepsilon - m\omega^2) \sin(\omega t) - \alpha\omega \cos(\omega t) \right)$$

iv) Comme la solution générale est $y(t) = y_{\text{hom}}(t) + y_{\text{part}}(t)$ et qu'on a $y_{\text{hom}}(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, le mouvement de la masse s'approche de la solution particulière si le système est maintenu assez longtemps.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 2B

Échauffement. (Linéarité)

i) Soit $y = \alpha y_1 + \beta y_2$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y' + p(x)y = (\alpha y_1 + \beta y_2)' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1' + \beta y_2') + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(y_1' + p(x)y_1) + \beta(y_2' + p(x)y_2) = \alpha q(x) + \beta q(x) = (\alpha + \beta)q(x) = q(x)$.

ii) Soit $y = y_1 - y_2$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y' + p(x)y = (y_1 - y_2)' + p(x)(y_1 - y_2) = (y_1' - y_2') + p(x)(y_1 - y_2) = (y_1' + p(x)y_1) - (y_2' + p(x)y_2) = q(x) - q(x) = 0$.

Exercice 1. (Solution générale et problème de Cauchy)

i) Solution générale

Pour commencer on constate que $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, est une solution. On procède par séparation des variables:

[

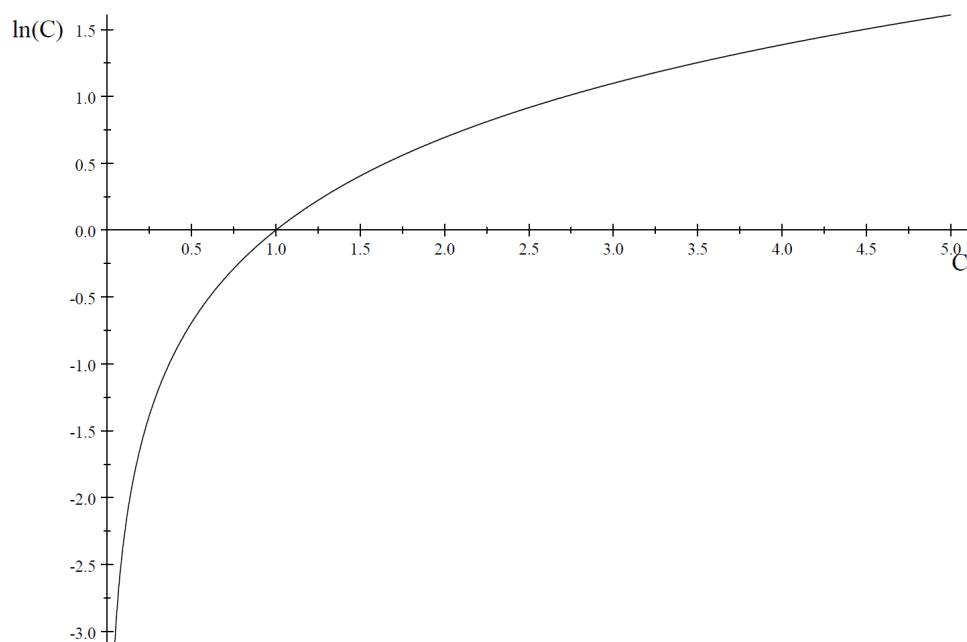
$$2y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\begin{array}{l} y \neq 0 \\ \Leftrightarrow 3 \frac{dy}{y} = -2 \frac{dx}{x} \\ x \neq 0 \end{array}$$

et après intégration

$$3 \ln(|y|) = -2 \ln(|x|) + \ln(C)$$

où $C > 0$. A noter que, la fonction $\ln: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ étant bijective,



toute constante dans \mathbb{R} peut être représentée sous cette forme).

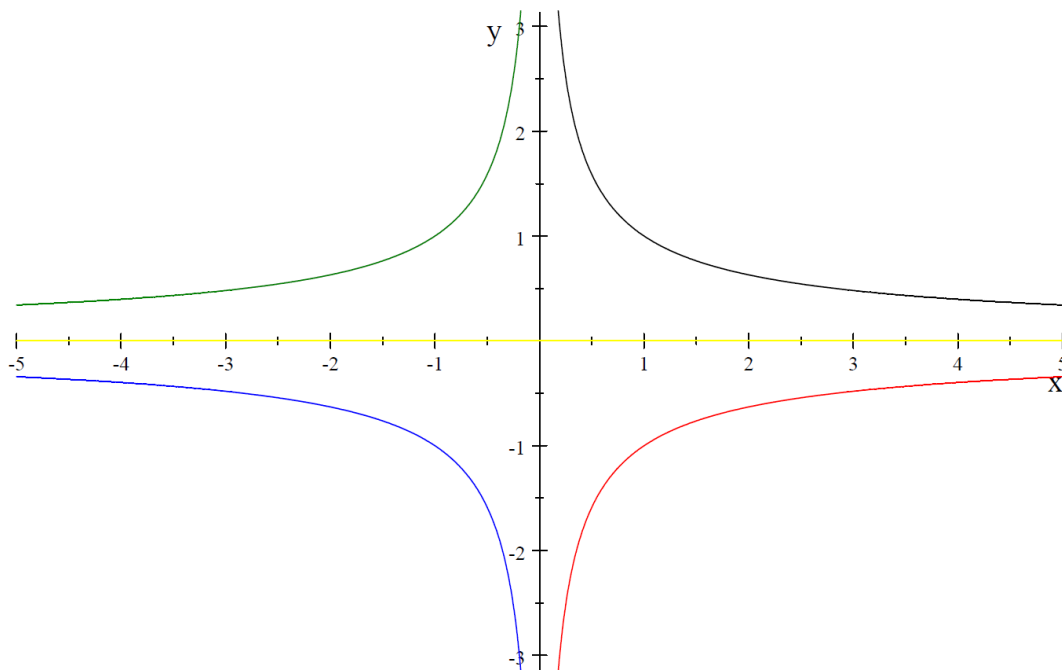
On obtient donc

$$\begin{aligned} \ln(|y(x)|^3) &= \ln\left(\frac{C}{|x|^2}\right), & x \neq 0, C > 0 \\ \implies |y(x)|^3 &= \frac{C}{|x|^2}, & x \neq 0, C > 0, \\ \implies |y(x)| &= \frac{C}{|x|^{\frac{2}{3}}}, & x \neq 0, C > 0, \\ \implies y(x) &= \frac{C}{|x|^{\frac{2}{3}}}, & x \neq 0, C \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

La solution générale est donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} y(x) = 0, & x \in \mathbb{R}; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, & y(x) = \frac{C}{x^{\frac{2}{3}}}, \quad x \in \mathbb{R}_+^*; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, & y(x) = \frac{C}{(-x)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \in \mathbb{R}_-^* \end{array} \right\}$$

et graphiquement :



avec la solution $y(x) = 0$ (jaune), ainsi que les solutions $\forall C > 0, y(x) = \frac{C}{x^{2/3}}$ (ligne noire), ainsi que les solutions $\forall C < 0, y(x) = \frac{C}{x^{2/3}}$ (ligne rouge), ainsi que les solutions $\forall C > 0, y(x) = \frac{C}{(-x)^{2/3}}$ (ligne verte), ainsi que les solutions $\forall C < 0, y(x) = \frac{C}{(-x)^{2/3}}$ (ligne bleue).

ii) Solutions des problèmes de Cauchy

- (a) Cas $y(1) = 2$. On a $x > 0$ et $C > 0$. On a $y(1) = \frac{C}{1^{2/3}} = C \stackrel{!}{=} 2$, et donc $C = 2$.
Donc $y(x) = \frac{2}{x^{2/3}}$, $x \in]0, \infty[$ (solution maximale).
- (b) Cas $y(1) = -2$. On a $x > 0$ et $C < 0$. On a $y(1) = \frac{C}{1^{2/3}} = C \stackrel{!}{=} -2$, et donc $C = -2$.
Donc $y(x) = \frac{-2}{x^{2/3}}$, $x \in]0, \infty[$ (solution maximale).
- (c) Cas $y(-1) = 2$. On a $x < 0$ et $C > 0$. On a $y(-1) = \frac{C}{1^{2/3}} = C \stackrel{!}{=} 2$, et donc $C = 2$.
Donc $y(x) = \frac{2}{(-x)^{2/3}}$, $x \in]-\infty, 0[$ (solution maximale).
- (d) Cas $y(-1) = -2$. On a $x < 0$ et $C < 0$. On a $y(-1) = \frac{C}{1^{2/3}} = C \stackrel{!}{=} -2$, et donc $C = -2$.
Donc $y(x) = \frac{-2}{(-x)^{2/3}}$, $x \in]-\infty, 0[$ (solution maximale).
- (e) Cas $y(0) = 0$. La solution maximale est $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. (Familles de courbes orthogonales)

- i) Il faut d'abord trouver l'équation différentielle de la famille de courbes données qui s'obtient en dérivant l'équation $xy = c$ des deux côtés par rapport à x ("dérivation implicite", cf. Analyse I). Ceci donne $xy' + y = 0$. L'équation différentielle des courbes orthogonales se déduit en remplaçant y' par $-1/y'$ (cf. cours):

$$-\frac{x}{y'} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad yy' - x = 0.$$

Par séparation des variables et par intégration, on obtient $y^2 - x^2 = C$ pour $C \in \mathbb{R}$ qui sont des équations d'hyperboles (voir Fig. 1).

- ii) Par dérivation implicite de l'équation $y^3 = cx^2$, on obtient $3y^2y' = 2cx$. Pour obtenir l'équation différentielle de la famille donnée, il faut éliminer la constante c en la remplaçant par son expression dans l'équation initiale, c.-à-d. par y^3/x^2 :

$$3xy' = 2y.$$

L'équation différentielle de la famille des courbes orthogonales est donc

$$-\frac{3x}{y'} = 2y \quad \Rightarrow \quad 2yy' + 3x = 0.$$

De nouveau par séparation des variables et par intégration, on obtient

$$y^2 = -\frac{3}{2}x^2 + \tilde{C} \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 2y^2 = C \quad \text{pour } \tilde{C}, C \in \mathbb{R},$$

qui sont des équations d'ellipses (voir Fig. 2).

- iii) Il faut de nouveau d'abord trouver l'équation différentielle de la famille de courbes données qui s'obtient en dérivant l'équation $x^2 + 2y^2 = c$ des deux côtés par rapport à x ("dérivation implicite", cf. Analyse I). Ceci donne $2x + 4yy' = 0$. L'équation différentielle des courbes orthogonales se déduit en remplaçant y' par $-1/y'$ (cf. cours):

$$2x + 4yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 4y\left(\frac{-1}{y'}\right) = 0.$$

Par séparation des variables et par intégration, on obtient $y = Cx^2$ pour $C \in \mathbb{R}$ qui sont des équations de paraboles (voir Fig. 3). Il manque la courbe $x = 0$ qui n'est pas le graphe d'une fonction de x . Elle peut être obtenue de $y = Cx^2$ après division par C dans le cas où $C \rightarrow \infty$ (voir plus loin dans le cours).

Exercice 3. (Équations linéaires)

i) L'équation est de la forme $y' + p(x)y = q(x)$ avec $p(x) = 4$ et $q(x) = 3 \sin(2x)$.

- (a) La solution de l'équation homogène est $y_0(x) = e^{-4x}$, avec $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Selon la méthode des coefficients indéterminés (voir le cours, méthode c) avec $r = \lambda = 0$, $\alpha = 2$, $q(x) \in \text{vect} \{ \sin(2x) \} \Rightarrow y_p(x) \in \text{vect} \{ \sin(2x), \cos(2x) \}$ on pose :

$$y_p(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x).$$

On obtient (substitution dans l'équation)

$$C_1 2 \cos(2x) - C_2 2 \sin(2x) + 4C_1 \sin(2x) + 4C_2 \cos(2x) = 3 \sin(2x) + 0 \cos(2x)$$

et en comparant les coefficients on trouve les équations $2C_1 + 4C_2 = 0$ et $4C_1 - 2C_2 = 3$, avec la solution (voir algèbre linéaire) $C_1 = \frac{3}{5}$ et $C_2 = -\frac{3}{10}$. On a donc

$$y_p(x) = \frac{3}{5} \sin(2x) - \frac{3}{10} \cos(2x).$$

- (c) La solution générale est : $\forall C \in \mathbb{R}$, $y(x) = y_p(x) + Ce^{-4x}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

ii) L'équation est de la forme $y' + p(x)y = q(x)$ avec $p(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $q(x) = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$.

- (a) La solution de l'équation homogène est $y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- (b) On pose $y_p(x) = C(x)y_0(x)$ et l'on obtient l'équation $C'(x) = 4x$ et donc $C(x) = 2x^2$ et $y_p(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$
- (c) La solution générale est $\forall C \in \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{2x^2 + C}{\sqrt{1+x^2}}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. (Équations de Bernoulli)

i) Tout d'abord on a la solution triviale $y(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour trouver des solutions non-triviales on procède comme au cours (§ 1.6.2). On pose $u = y^{1-4} = y^{-3}$, $u' = -3y^{-4}y'$ et on multiplie l'équation donnée par $-\frac{3}{y^4}$:

$$y' - y = xy^4 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{y^4}y' + \frac{3}{y^3} = -3x \quad \Rightarrow \quad u' + 3u = -3x.$$

Comme l'équation différentielle en u ainsi obtenue est linéaire, on peut la résoudre en trouvant une solution de l'équation homogène associée et une solution particulière de l'équation complète par la méthode des coefficients indéterminés. On trouve

$$u_{\text{hom}}(x) = Ce^{-3x}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{\text{part}}(x) = Ax + B \quad \text{avec} \quad A = -1, \quad B = \frac{1}{3}$$

si bien que la solution générale est

$$u(x) = u_{\text{hom}}(x) + u_{\text{part}}(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{3} - x, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid u(x) = 0\}$$

Le domaine de $u(x)$ n'est pas \mathbb{R} parce que $u = \frac{1}{y^3}$ ne peut être zéro.

Les solutions y de l'équation initiale satisfont donc $y^3 = \frac{1}{u}$, c'est-à-dire

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)}} \quad \text{sur les intervalles ouverts sur lesquels } u(x) > 0,$$

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-u(x)}} \quad \text{sur les intervalles ouverts sur lesquels } u(x) < 0.$$

Pour illustrer les domaines de définition de $y(x)$, on considère les trois valeurs de C pour lesquelles la fonction $u(x)$ est représentée à la Fig. 1.

En notant les solutions avec $C = c$ par y_c et u_c , on a

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u_2(x)}}, \quad x \in]-\infty, b[$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-u_2(x)}}, \quad x \in]b, \infty[$$

$$y_{-0.2}(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-u_{-0.2}(x)}}, \quad x \in]-\infty, a_1[$$

$$y_{-0.2}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u_{-0.2}(x)}}, \quad x \in]a_1, a_2[$$

$$y_{-0.2}(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-u_{-0.2}(x)}}, \quad x \in]a_2, \infty[$$

$$y_1(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-u_1(x)}}, \quad x \in]-\infty, \infty[$$

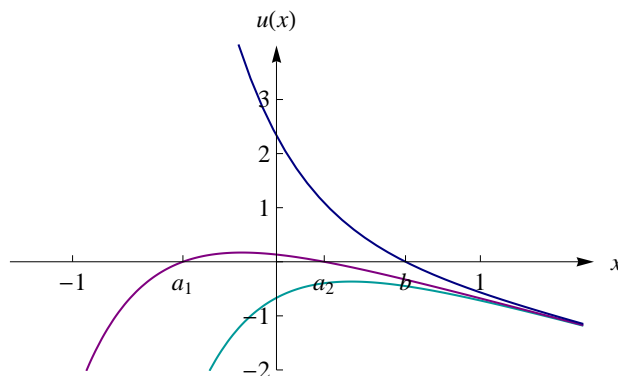


Figure 4: : Fonctions $u(x)$ de l'Ex. 2i pour $C = 2$, $C = -0.2$ et $C = -1$ (du haut en bas).

ii) Comme pour toute équation différentielle de Bernoulli on a la solution triviale $y(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour trouver les solutions non triviales, on fait la substitution $u = y^{1-3} = y^{-2}$, $u' = -2y^{-3}y'$ et on multiplie l'équation donnée par $-\frac{2}{y^3}$ pour obtenir une équation différentielle linéaire en u :

$$y' + 4y = 2(x+1)y^3 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2y'}{y^3} - \frac{8}{y^2} = -4(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad u' - 8u = -4(x+1).$$

On trouve sa solution générale comme au point i) :

$$u_{\text{hom}}(x) = Ce^{8x}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{\text{part}}(x) = Ax + B \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow u(x) = u_{\text{hom}}(x) + u_{\text{part}}(x) = Ce^{8x} + \frac{8x+9}{16}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\},$$

où la restriction du domaine est analogue au point i) sauf qu'il faut avoir $u > 0$ ici (cf. définition de u).

Les solutions y de l'équation initiale satisfont donc $\frac{1}{y^2} = u$, c'est-à-dire

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{Ce^{8x} + \frac{8x+9}{16}}}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in]a, b[,$$

où $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sont tels que $u(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

iii) De nouveau faut effectuer le changement de variable $u = 1/y^2$, $u' = -\frac{2}{y^3}y'$ afin d'obtenir une équation linéaire :

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^3 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{y^3}y' + -\frac{2}{y^3}\frac{y}{x} = -\frac{2}{y^3}x^2 y^3 \quad \Leftrightarrow \quad u' - \frac{2u}{x} = -2x^2.$$

On a

$$u_{\text{hom}}(x) = C \exp\left(-\int -\frac{2}{x} dx\right) = C \exp(2 \ln |x|) = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

et on pose (variation de la constante) $u_{\text{part}}(x) = C(x)x^2$ comme solution particulière. Ainsi

$$C'(x)x^2 = -2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = -2$$

dont une solution est $C(x) = -2x$. On obtient donc comme solution particulière

$$u_{\text{part}}(x) = -2x^3$$

et donc

$$u(x) = Cx^2 - 2x^3, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \begin{cases}]-\infty, 0[& C > 0 \\]0, \frac{C}{2}[& C > 0 \\]-\infty, \frac{C}{2}[& C \leq 0 \end{cases}$$

En fait on ne peut pas définir u pour tout $x \in \mathbb{R}$ parce que $u = 1/y^2 > 0$. Ainsi il faut trouver les intervalles où $u(x) > 0$. Sur ces intervalles-là on peut alors écrire $y = 1/\sqrt{u}$, c.-à-d.

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{Cx^2 - 2x^3}}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \begin{cases}]-\infty, 0[& C > 0 \\]0, \frac{C}{2}[& C > 0 \\]-\infty, \frac{C}{2}[& C \leq 0 \end{cases}$$

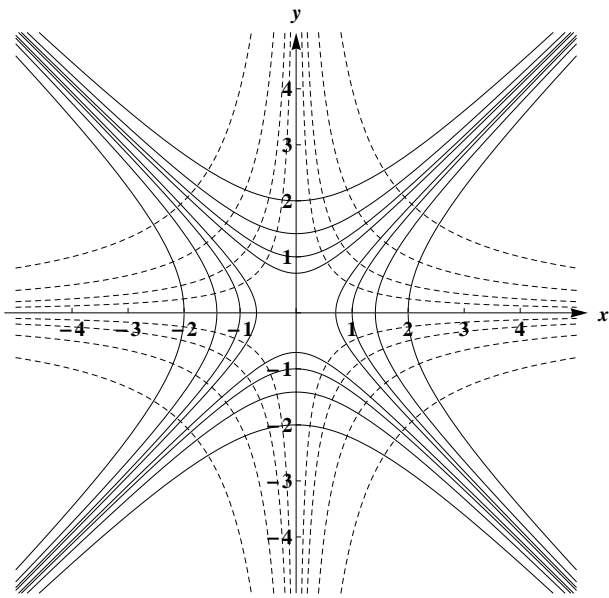


Figure 1: Des courbes $xy = c$ (en pointillé) et leurs courbes orthogonales.

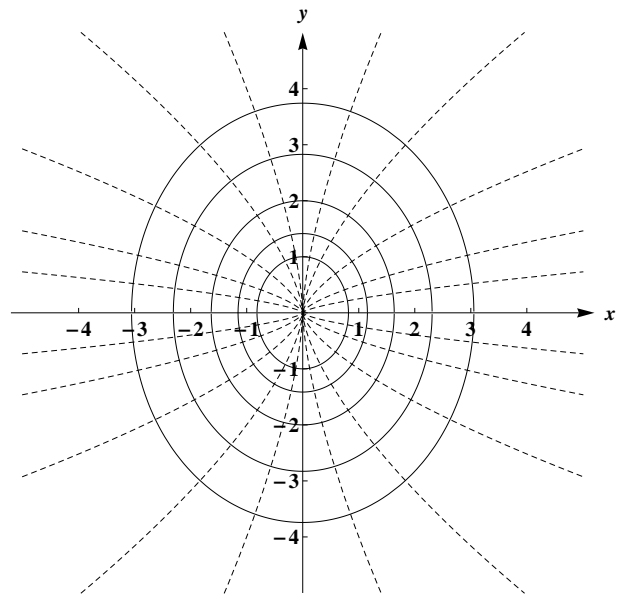


Figure 2: Des courbes $y^3 = cx^2$ (en pointillé) et leurs courbes orthogonales.

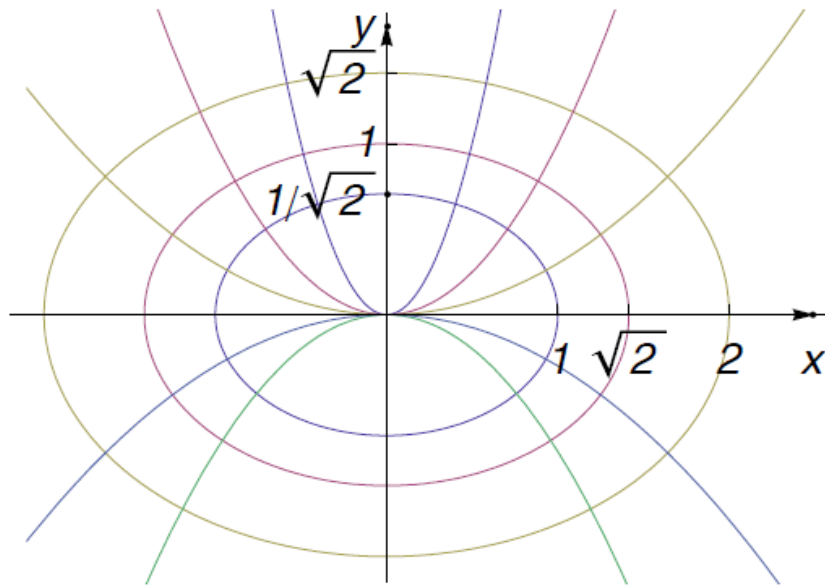


Figure 3: Des courbes $x^2 + 2y^2 = c$ et leurs courbes orthogonales.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 3A

Echauffement.

On pose le changement de variable $x = \varphi(u) = u^2$, $\varphi'(u) = 2u$. Comme $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(2) = 4$, les bornes de u sont $\alpha = 0$ et $\beta = 2$. Ainsi

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx = \int_0^2 \frac{2u^2}{\sqrt{1+u}} du$$

Pour calculer l'intégrale en u , il faut encore un changement de variable. On pose $u = \psi(t) = t^2 - 1$, $\psi'(t) = 2t$. Comme $\psi(1) = 0 = \alpha$ et $\psi(\sqrt{3}) = 2 = \beta$, les bornes de t sont 1 et $\sqrt{3}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{2u^2}{\sqrt{1+u}} du &= \int_1^{\sqrt{3}} 4(t^2 - 1)^2 dt = 4 \left[\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 4 \left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 \right) = \frac{16\sqrt{3}}{5} - \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

Exercice 1.

i) On résout d'abord le système donné en inversant la matrice :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x) \tan(x) \\ \cos(x) \tan(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-\sin(x)^2}{\cos(x)} \\ \sin(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc on obtient facilement que $C_2(x) = \int \sin(x) dx = -\cos(x)$ (rappelez-vous qu'on n'a pas besoin des constantes d'intégration pour une solution particulière).

Pour trouver $C_1(x)$ observons que

$$C_1'(x) = \frac{-\sin(x)^2}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)^2 - 1}{\cos(x)} = \cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}$$

et donc

$$C_1(x) = \sin(x) - \int \frac{1}{\cos(x)} dx.$$

Pour calculer cette dernière primitive, on pose le changement de variable $x = \varphi(t) = \arcsin(t)$, donc $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Par la formule du changement de variable (cf. Analyse) on a

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos(x)} dx &= \int \frac{1}{\cos(\varphi(t))} \varphi'(t) dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\varphi(t))^2}} \varphi'(t) dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{1}{1-t^2} dt = \int \frac{1}{(1+t)(1-t)} dt \\ &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\ln(|1+t|) - \ln(|1-t|) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} \right| \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{(1+\sin(x))^2}{1-\sin(x)^2} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \right|^2 \right) = \ln \left(\left| \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) \end{aligned}$$

Ainsi $C_1(x) = \sin(x) - \ln \left(\left| \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \right| \right)$ et donc

$$\begin{aligned} y_{\text{part}}(x) &= C_1(x) \cos(x) + C_2(x) \sin(x) \\ &= \left[\sin(x) - \ln \left(\left| \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) \right] \cos(x) - \cos(x) \sin(x) \\ &= -\cos(x) \ln \left(\left| \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) \end{aligned}$$

ii) Les points problématiques sont ceux où $\cos(x) = 0$ ou $1 + \sin(x) = 0$. La fonction f est donc bien définie sur tous les autres points, c.-à-d. sur $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$.

Pour $x_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, on a $\cos(x_{2n}) = 0$ et $1 + \sin(x_{2n}) = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_{2n}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-\cos(x) \ln \left(\left| \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-\cos(x) \ln(|1+\sin(x)|) \right) + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos(x) \ln(|\cos(x)|) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-\cos(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(|1+\sin(x)|) + \lim_{y \rightarrow 0} (y \ln(|y|)) \\ &= 0 \cdot \ln(2) + 0 = 0, \end{aligned}$$

où la dernière limite en y est calculée par Bernoulli-l'Hospital. En effet, les hypothèses sont satisfaites si on écrit $y \ln(|y|) = \frac{\ln(|y|)}{1/y}$ (le vérifier). A priori, on devrait séparer les cas $y > 0$ et $y < 0$ mais comme $\frac{d}{dy} \ln(|y|) = \frac{1}{y}$ pour $y > 0$ et pour $y < 0$, il suffit de calculer une seule limite :

$$\lim_{y \rightarrow 0} (y \ln(|y|)) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(|y|)}{\frac{1}{y}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} (-y) = 0.$$

Si on définit f en ces points par $f(x_{2n}) = 0$, elle est continue en ces points (on a en effet fait un prolongement par continuité).

Similairement, pour $x_{2n+1} = \frac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, on a $\cos(x_{2n+1}) = 0$ et $1 + \sin(x_{2n+1}) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_{2n+1}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \left(-\cos(x) \ln \left(\left| \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin(x) \ln \left(\left| \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \right| \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin(x) \ln \left(\left| \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{\sin(x)(1 + \cos(x))} \right| \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin(x) \ln \left(\left| \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} \right| \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin(x) \ln(|\sin(x)|) \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin(x) \ln(|1 + \cos(x)|) \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (-y \ln(|y|)) + \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \ln(|1 + \cos(x)|) \\ &= 0 + 0 \cdot \ln(2) = 0, \end{aligned}$$

Si on définit f en ces points par $f(x_{2n+1}) = 0$ (prolongement par continuité), elle est aussi continue en ces points et donc sur tout \mathbb{R} .

iii) Les points qui pourraient poser problème pour la dérivabilité sont les points où f n'était pas continue à la base, c'est-à-dire $\{x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

Etudions d'abord la dérivabilité de f en les points de la forme x_{2n} . Pour ces points on a

$$-\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} - 2n\pi\right) = \sin(x - x_{2n}),$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_{2n}} \frac{f(x) - f(x_{2n})}{x - x_{2n}} &= \lim_{x \rightarrow x_{2n}} \frac{-\cos(x)}{x - x_{2n}} \ln \left(\left| \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_{2n}} \frac{\sin(x - x_{2n})}{x - x_{2n}} \ln \left(\left| \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_{2n}} \frac{\sin(x - x_{2n})}{x - x_{2n}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_{2n}} \left(\ln(|1 + \sin(x)|) - \ln(|\cos(x)|) \right) \\ &= 1 \cdot (\ln(2) + \infty) = \infty \end{aligned}$$

parce que $\lim_{x \rightarrow x_{2n}} -\ln(|\cos(x)|) = \infty$. Ainsi f n'est pas dérivable en x_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour les points de la forme x_{2n+1} on a

$$-\cos(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \left(-\frac{\pi}{2} - 2n\pi\right)\right) = -\sin(x - x_{2n+1}),$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_{2n+1}} \frac{f(x) - f(x_{2n+1})}{x - x_{2n+1}} &= \lim_{x \rightarrow x_{2n+1}} \frac{-\cos(x)}{x - x_{2n+1}} \ln \left(\left| \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_{2n+1}} \frac{-\sin(x - x_{2n+1})}{x - x_{2n+1}} \ln \left(\left| \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) \\ &= (-1) \cdot (-\infty) = \infty \end{aligned}$$

parce que $\lim_{x \rightarrow x_{2n+1}} \ln \left(\left| \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) = -\infty$. Ainsi f n'est pas dérivable en x_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction f n'est donc pas dérivable en $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Ceci est une conséquence du fait que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \tan(x)$. En effet, si f était (deux fois) dérivable en ces points, on aurait une contradiction parce que le membre de droite $\tan(x)$ n'est pas défini en ces points.

iv) Le produit de deux fonctions périodiques est périodique si le rapport des périodes est rationnel et la composition d'une fonction quelconque avec une fonction périodique est périodique. Ainsi la fonction f est périodique en tant que produit des fonctions $-\cos(x)$ et $\ln \left(\left| \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \right| \right)$ qui sont les deux 2π -périodiques.

v) On a

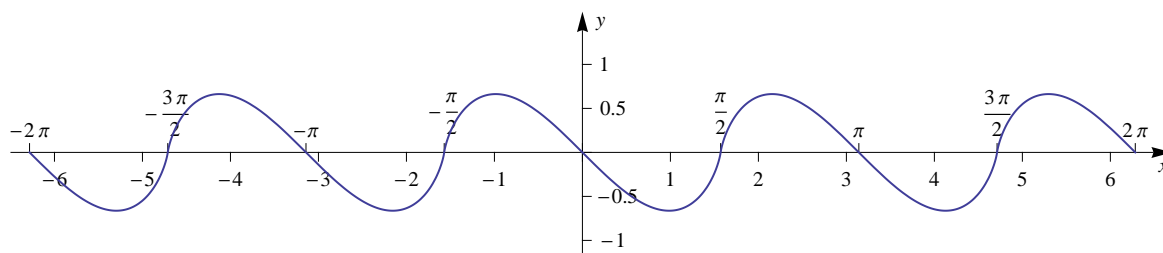
$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= -\cos(x + \pi) \ln \left(\left| \frac{1 + \sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} \right| \right) \\ &= \cos(x) \ln \left(\left| \frac{1 - \sin(x)}{-\cos(x)} \right| \right) = f(x), \end{aligned}$$

car

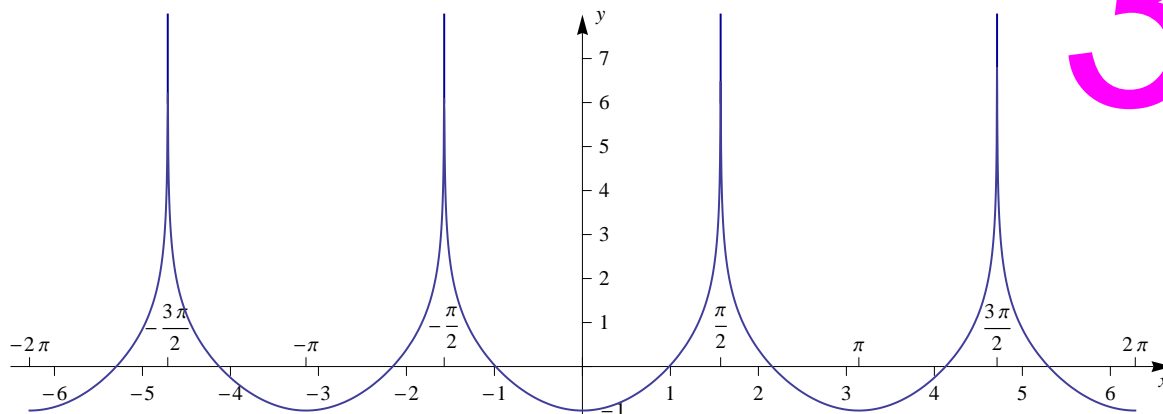
$$\begin{aligned} \ln \left(\left| \frac{1 - \sin(x)}{-\cos(x)} \right| \right) &= \ln \left(\left| \frac{(1 - \sin(x))(1 + \sin(x))}{-\cos(x)(1 + \sin(x))} \right| \right) \\ &= \ln \left(\left| \frac{1 - \sin^2(x)}{-\cos(x)(1 + \sin(x))} \right| \right) = \ln \left(\left| \frac{\cos^2(x)}{-\cos(x)(1 + \sin(x))} \right| \right) \\ &= \ln \left(\left| \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} \right| \right) = -\ln \left(\left| \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \right| \right), \end{aligned}$$

et donc f est bien π -périodique.

Voici encore les graphes de f



et de f' :



Exercice 2.

- i) Pour résoudre cette équation linéaire du 4^e ordre à coefficients constants, on utilise la généralisation de la méthode vue pour les équations du 2^e ordre.

L'équation caractéristique de l'équation différentielle donnée est $\lambda^4 - \lambda^2 - 12 = 0$ et admet les racines

$$\lambda_{1,2} = \pm 2, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{3}i.$$

Comme toutes ces racines sont des racines simples, la solution générale de l'équation homogène associée est

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x) + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

Par la méthode des coefficients indéterminés, une solution particulière de l'équation complète est de la forme $y_{\text{part}} = Ax + B$, ce qui mène à l'équation $-12(Ax + B) = 12x + 5$, d'où on obtient $A = -1$ et $B = -\frac{5}{12}$. La solution générale est ainsi

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x) + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} - x - \frac{5}{12},$$

$x, C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

- ii) L'équation caractéristique est $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$ et ses racines sont

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{avec } p_1 = 2 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -1 \quad \text{avec } p_2 = 1.$$

La solution générale de l'équation homogène associée est alors

$$y_{\text{hom}}(x) = P_1(x)e^{3x} + C_2 e^{-x},$$

où $P_1(x) = C_0 + C_1 x$ est un polynôme de degré $p_1 - 1 = 1$ et les constantes $C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Pour appliquer la méthode des coefficients indéterminés, on regarde si les membres de droite et leurs dérivées satisfont l'équation homogène. Clairement e^{-x} est une solution et $\sin(x)$ n'en est pas (regarder la solution générale y_{hom}). La fonction $x e^{-x}$ ne satisfait par contre pas l'équation homogène. Ainsi une solution particulière y_{part} est de la forme

$$y_{\text{part}} = Ax e^{-x} + B \sin(x) + C \cos(x).$$

et ses dérivées sont

$$\begin{aligned}y_{\text{part}}' &= Ae^{-x} - Axe^{-x} + B \cos(x) - C \sin(x) \\y_{\text{part}}'' &= -2Ae^{-x} + Axe^{-x} - B \sin(x) - C \cos(x) \\y_{\text{part}}''' &= 3Ae^{-x} - Axe^{-x} - B \cos(x) + C \sin(x)\end{aligned}$$

Si on met y_{part} dans l'équation différentielle donnée on obtient

$$16Ae^{-x} + 2B \cos(x) + 14C \cos(x) + 14B \sin(x) - 2C \sin(x) = e^{-x} + \sin(x),$$

d'où

$$16A = 1, \quad 2B + 14C = 0 \quad \text{et} \quad 14B - 2C = 1.$$

Les solutions sont $A = \frac{1}{16}$, $B = \frac{7}{100}$ et $C = -\frac{1}{100}$. Ainsi

$$y_{\text{part}} = \frac{1}{16}xe^{-x} + \frac{7}{100} \sin(x) - \frac{1}{100} \cos(x)$$

et la solution générale de l'équation donnée est

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) = C_0e^{3x} + C_1xe^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{16}xe^{-x} + \frac{7}{100} \sin(x) - \frac{1}{100} \cos(x),$$

où $x, C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

- i) L'isocline associée à la pente c de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ est donnée par $f(x, y) = c$.

Comme $y = 0$ n'est pas solution de l'équation $y^2 y' + x^2 = 0$, on a $f(x, y) = -\frac{x^2}{y^2}$ avec $y \neq 0$. Les isoclines associée à la pente c sont donc données par l'équation

$$c + \frac{x^2}{y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad cy^2 + x^2 = 0.$$

Pour $c = 0$, cette équation décrit la droite $x = 0$. Quand $c \neq 0$, on a $y^2 = -\frac{x^2}{c}$ ce qui implique que $c < 0$. Les isoclines dans ce cas sont

$$y = \pm \frac{x}{\sqrt{-c}} \quad \text{avec} \quad c < 0,$$

donc aussi des droites (deux pour chaque pente c).

Les isoclines pour $y' \in \{0, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -8\}$ et les trajectoires intégrales pour les conditions initiales données sont représentées à la Fig. 1.

- ii) L'équation différentielle $y^2 y' + x^2 = 0$ est une équation différentielle à variables séparées

$$y^2 dy = -x^2 dx,$$

dont la solution générale est obtenue par intégration (ne pas confondre la pente c et la constante d'intégration C):

$$\frac{1}{3}y^3 = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{C}{3}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad y(x)^3 = C - x^3, \quad C \in \mathbb{R}$$

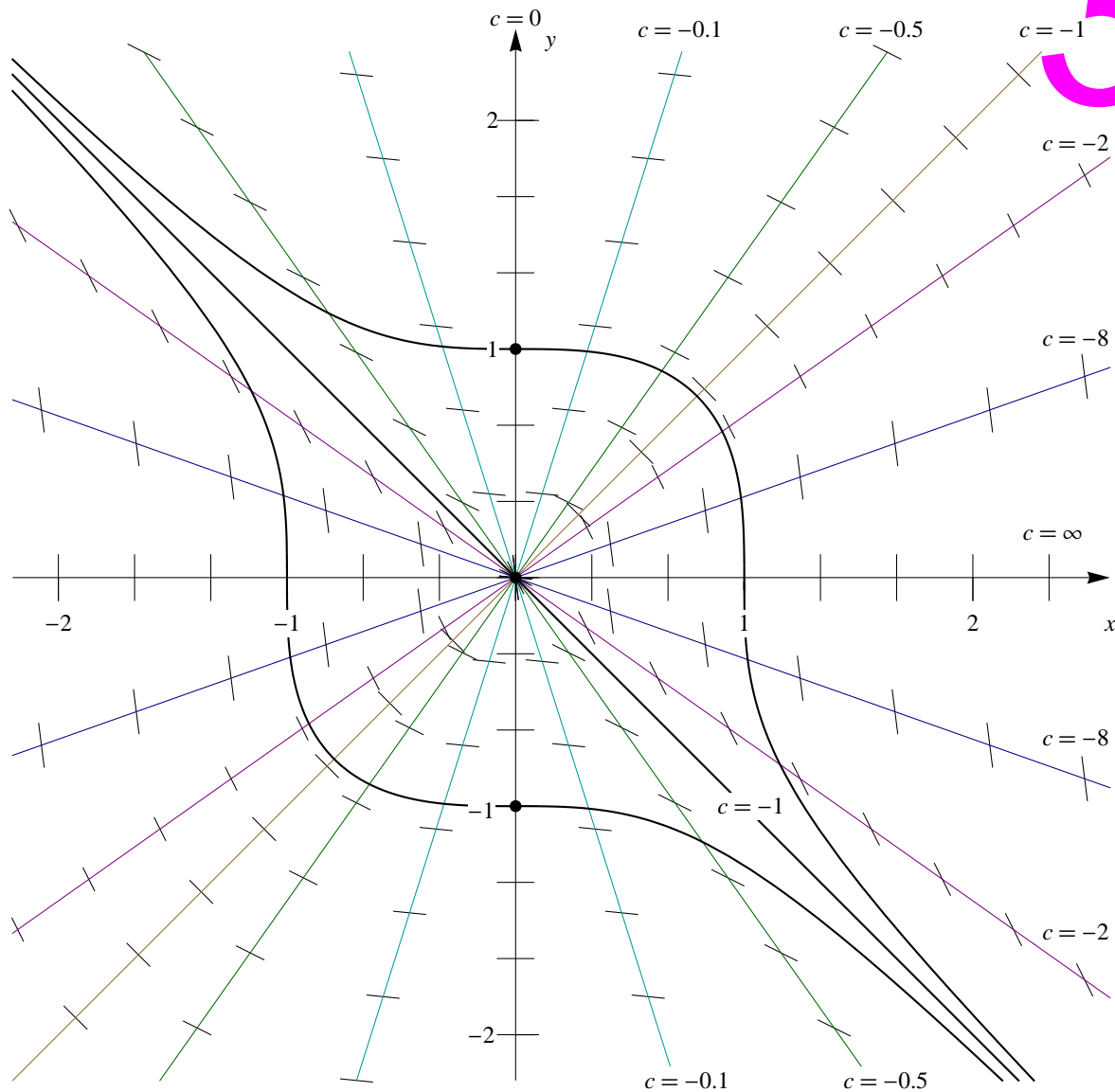


Fig. 1: Les points indiquent les conditions initiales données.

Comme $y(0)^3 = C$, les solutions pour les conditions initiales données correspondent au choix de $C = -1$, $C = 0$ et $C = 1$ et l'on obtient respectivement (voir la remarque en bas) les solutions maximales $y(x) = \sqrt[3]{-1-x^3}$ sur $]-\infty, -1[$ et $y(x) = -\sqrt[3]{1+x^3}$ sur $]-1, +\infty[$ (cas $C = -1$), $y(x) = -x$ sur $]-\infty, 0[$ et $y(x) = -x$ sur $]0, +\infty[$ (cas $C = 0$), $y(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ sur $]-\infty, 1[$ et $y(x) = -\sqrt[3]{-1+x^3}$ sur $]1, +\infty[$ (cas $C = 1$). On vérifie alors que ces fonctions correspondent aux trajectoires sur la Fig. 1 ($C = -1$: courbe inférieure; $C = 0$: droite $y = -x$; $C = 1$: courbe supérieure).

Remarque : réécrite sous la forme requise par le théorème d'existence et d'unicité l'équation devient :

$$y' = -\frac{x^2}{y^2} =: f(x, y)$$

Cette fonction f , ainsi que la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\frac{x^2}{y^3}$ (voir la semaine 6 pour les détails), sont des fonctions rationnelles et donc continues en tout point de leur

domaine de définition

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

(voir la semaine 5 pour les détails). On a donc une solution unique de l'équation différentielle passant par tout point de D . Les points de la forme $(x, 0)$ ne sont pas couverts par le théorème d'existence et d'unicité (au moins pas si on cherche une solution qui passe par ces points sous la forme d'une fonction $y(x)$). Ceci se manifeste dans les solutions par la divergence de $y'(x)$ en $x = -1$ (cas $C = -1$) et en $x = 1$ (cas $C = 1$). Le cas $C = 0$ est encore plus particulier. On pourrait admettre que la fonction $y(x) = -x$ soit une solution de l'équation différentielle sur \mathbb{R} dans la mesure où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y(x)) = -1 = \lim_{x \rightarrow 0} y'(x)$.

Exercice 4.

i) L'équation différentielle $y' = 5(y^4)^{1/5}$ est à variables séparées. Par intégration on obtient

$$\frac{dy}{5(y^4)^{1/5}} = dx \quad \Leftrightarrow \quad y^{1/5} = x - C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad y = (x - C)^5, \quad C \in \mathbb{R}.$$

De plus, on a la solution triviale $y = 0$ qu'on avait perdue en divisant par $(y^4)^{1/5}$.

Avec ceci, on n'a pas encore trouvé toutes les solutions de l'équation donnée. Il manque les combinaisons par morceaux des solutions décrites ci-dessus, combinées de telle sorte que le résultat soit une fonction continûment différentiable. Les trois éléments qu'on peut combiner sont donc les parties positive et négative de la fonction $(x - C)^5$ pour des valeurs distinctes de C et la fonction triviale $y = 0$. L'ensemble des solutions est ainsi donnée par

$$y(x) = \begin{cases} (x - C_1)^5 & x < C_1 \\ 0 & C_1 \leq x \leq C_2 \\ (x - C_2)^5 & x > C_2 \end{cases} \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad C_1 \leq C_2 \quad (1)$$

$$y(x) = \begin{cases} (x - C)^5 & x < C \\ 0 & x \geq C \end{cases} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq C \\ (x - C)^5 & x > C \end{cases} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Notons que la solution obtenue par intégration, $y(x) = (x - C)^5$, correspond à (1) avec $C_1 = C_2$.

ii) Pour que $y(-3) = (-3 - C)^5 = -1$, il faut que $C = -2$ et pour que $y(2) = (2 - C)^5 = 1$, il faut que $C = 1$. La trajectoire cherchée est donc la solution (1) avec $C_1 = -2$ et $C_2 = 1$. C'est la courbe épaisse sur la Fig. 2 qui montre quelques solutions $y(x)$ ainsi que les points $(-3, -1)$ et $(2, 1)$.

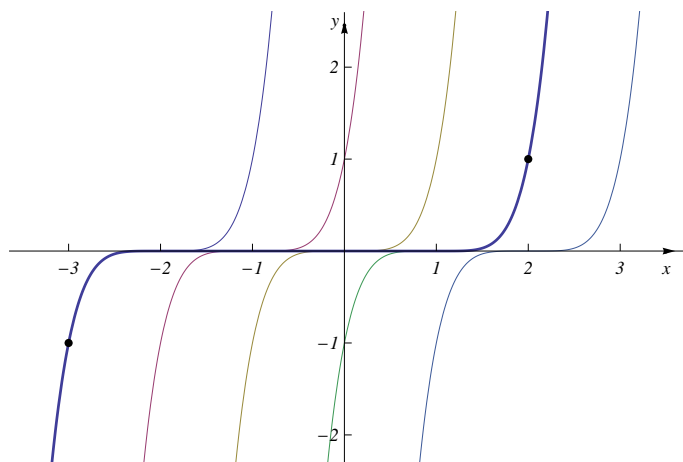


Fig. 2

Exercice 5. (QCM : problème de Cauchy)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $x y' - y = x$ pour $x \in]0, \infty[$ avec la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie

$y(2) = \ln(2)$

$y(2) = -2 \ln(2)$

$y(2) = 2 \ln(2)$

$y(2) = 2 \ln(2) + 2$

Exercice 6. (QCM : séparation des variables)

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\frac{1}{2}y' \sin(y) = (4x^3 + 3x) \cos(y)^2$ qui sont définies sur tout \mathbb{R} est donnée par :

$y(x) = \pm \arcsin\left(\frac{1}{2x^4 + 3x^2 + C}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$

$y(x) = \pm \arccos\left(\frac{1}{2x^4 + 3x^2 + C}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$

$y(x) = \pm \arccos\left(e^{-\frac{2}{2x^4 + 3x^2 + C}}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$

$y(x) = \pm \arccos\left(\frac{-1}{2x^4 + 3x^2 + C}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 7. (QCM : séparation des variables)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y' - \cos(x)y + \cos(x)y^2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ est :

$y(x) = \frac{1}{1 + e^{-\sin(x)}}$

$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-\sin(x)}$

$y(x) = \frac{1}{1 + e^{\sin(x)}}$

$y(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{2}\sin(x)}}$

Exercice 8. (QCM : problème de Cauchy)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y'' - 8y' + 41y = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $y(0) = 7$ et $y'(0) = -2$ est :

$y(x) = e^{5x} \left(7 \cos(4x) - \frac{37}{4} \sin(4x)\right)$

$y(x) = (-37x + 7)e^{5x}$

$y(x) = 37e^{4x} - 30e^{5x}$

$y(x) = e^{4x} (7 \cos(5x) - 6 \sin(5x))$

Analyse avancée II – Corrigé de la série 3B

Échauffement. (Invariance d'échelle)

Supposons que $y_1(x)$ est une solution de l'équation $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, et soit pour $C \in \mathbb{R}^*$ la fonction $y_C(x) = \frac{1}{C} y_1(Cx)$. Alors on obtient

$$y'_C(x) = y'_1(Cx) = f\left(\frac{y_1(Cx)}{Cx}\right) = f\left(\frac{y_C(x)}{x}\right),$$

ce qui montre que y_C est aussi solution de l'équation.

Exercice 1. (Équations homogènes)

i) Pour $y \neq \pm x$ on peut réécrire l'équation comme

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} =: f(x, y).$$

Comme on verra dans la suite du cours, la fonction f , ainsi que la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont les deux continues sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq \pm y\}$. Par le théorème d'existence et d'unicité, l'équation différentielle doit donc avoir une solution unique en tout point de D . Le comportement des solutions proche des diagonales $x = y$ et $x = -y$ sera discuté sous ii).

L'équation est homogène :

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Comme vu au cours, on pose $y(x) = xv(x)$, donc $y' = v + xv'$ et on obtient l'équation

$$v + xv' = \frac{2v}{1 - v^2}.$$

A noter que les points (x, y) sur les diagonales sont maintenant caractérisés par $v(x, y) = \pm 1$. On enclenche la méthode de la résolution par séparation des variables qui donne successivement, pour $x \neq 0$ et $v \neq 0$:

$$\frac{1 - v^2}{v + v^3} dv = \frac{1}{x} dx$$

puis en utilisant que

$$\frac{1 - v^2}{v + v^3} = \frac{1}{v} + \frac{-2v}{1 + v^2}$$

(méthode de la décomposition en éléments simples) on obtient après intégration

$$\ln\left(\frac{|v|}{1+v^2}\right) = \ln(C|x|), \quad C > 0,$$

d'où ("fin de la parenthèse séparation des variables"), l'équation pour la fonction $v(x)$:

$$\frac{|v(x)|}{1+v(x)^2} = C|x|, \quad C > 0,$$

que l'on doit maintenant discuter. On commence par enlever la valeur absolue de $v(x)$ en augmentant le domaine de C (voir l'exemple du cours), ce qui donne

$$\frac{v(x)}{1+v(x)^2} = C|x|, \quad C \in \mathbb{R}^*.$$

A ce point il faut se rappeler que l'on a dû exclure le point $x = 0$ pour utiliser la méthode de la séparation des variables. On a donc deux familles de solutions $v(x)$, une sur l'intervalle $x > 0$, qui satisfait

$$\left\{ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{v(x)}{1+v(x)^2} = Cx, \quad x > 0 \right\},$$

et une sur l'intervalle $x < 0$ qui satisfait

$$\left\{ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{v(x)}{1+v(x)^2} = -Cx, \quad x < 0 \right\}.$$

La constante C étant arbitraire on peut réécrire la deuxième famille sous la même forme que la première,

$$\left\{ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{v(x)}{1+v(x)^2} = Cx, \quad x < 0 \right\},$$

ce qui donne pour la fonction $y(x)$ la familles d'équations

$$\left\{ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{y(x)}{x^2 + y(x)^2} = C, \quad x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Par résolution de l'équation quadratique on obtient les solutions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^+(x), \quad x \in \left] -\frac{1}{2|C|}, 0 \right[; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^+(x), \quad x \in \left] 0, \frac{1}{2|C|} \right[; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^-(x), \quad x \in \left] -\frac{1}{2|C|}, 0 \right[; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^-(x), \quad x \in \left] 0, \frac{1}{2|C|} \right[\end{array} \right\}$$

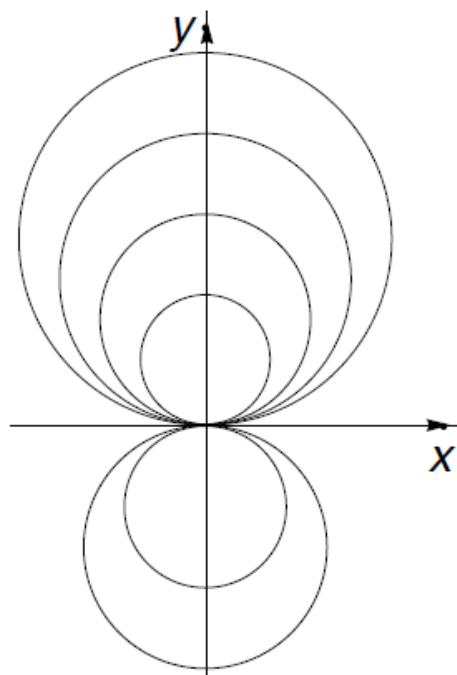
où

$$y_C^\pm(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4C^2x^2}}{2C}.$$

On vérifie maintenant facilement que à tout point $(x, y) \in D$, à l'exception des points de la forme $(0, y)$ avec $y \neq 0$, ainsi que des points de la forme $(x, 0)$ avec $x \neq 0$ (on a aussi dû exclure $v = 0$) correspond exactement une de ces solutions pour exactement une valeur de C . En ajoutant les points de la forme $(0, y)$ avec $y \neq 0$, ainsi que les deux solutions $y(x) = 0, x > 0$ et $y(x) = 0, x < 0$ on obtient finalement la solution générale

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = 0, \quad x > 0 ; \\ y(x) = 0, \quad x < 0 ; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^+(x), \quad x \in \left] -\frac{1}{2|C|}, \frac{1}{2|C|} \right[; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^-(x), \quad x \in \left] -\frac{1}{2|C|}, 0 \right[; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^-(x), \quad x \in \left] 0, \frac{1}{2|C|} \right[\end{array} \right\}$$

ii) Les solutions avec le signe moins correspondent à un quart d'un cercle tangent à l'axe des x passant par $x = 0$ mais sans le point $(0, 0)$ et sans les points sur la diagonale (car les intervalles sont ouverts), et les solutions avec le plus, couvrent les autres moitiés des cercles, et de nouveau sans les points sur la diagonale (car les intervalles sont ouverts).



Remarque additionnelle :

Malgré le fait que le point $(0, 0)$ ne soit pas dans le domaine D de la fonction $f(x, y)$ (voir le point i)), les fonctions $y_C^-(x)$ satisfont l'équation différentielle aussi en $(0, 0)$ dans le sens que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (y_C^-)'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_C^-(x)).$$

Pour cette raison certains auteurs écrivent la solution générale comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^+(x), \quad x \in \left] -\frac{1}{2|C|}, \frac{1}{2|C|} \right[; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^-(x), \quad x \in \left] -\frac{1}{2|C|}, \frac{1}{2|C|} \right[\end{array} \right\},$$

mais dans ce cas on devrait encore y ajouter toutes les solutions obtenues par chirurgie à partir des solutions y_C^- pour différentes valeurs de C .

Exercice 2. (Équations homogènes)

Dans tous les cas il faut procéder comme discuté dans l'Exercice 1, c'est-à-dire dans *i*) et *ii*) il faut commencer par enlever le point $x = 0$ où la fonction $f(x, y)$ correspondante n'est pas définie. A la fin on rajoute si possible $x = 0$ en calculant des limites, mais on ne donnera plus tous les détails.

i) L'équation différentielle peut s'écrire comme

$$y' = \frac{y}{x} \ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

Comme vu au cours, on pose $y(x) = xv(x)$, et donc $y' = v + xv'$ et on obtient l'équation

$$v + xv' = v \ln(v),$$

puis on enclenche la méthode de la séparation des variables

$$\frac{dv}{v(\ln(v) - 1)} = \frac{dx}{x},$$

et on trouve :

$$\begin{aligned} \ln(|\ln(v) - 1|) &= \ln(|x|) + \ln(C), \quad C > 0 \\ \Leftrightarrow |\ln(v) - 1| &= C|x|, \quad C > 0 \\ \Leftrightarrow \ln(v) &= 1 + C|x|, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

En substituant $\frac{y}{x}$ pour v , on a

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + Cx \quad \Leftrightarrow \quad y = x e^{1+Cx} \quad C \neq 0. \quad (1)$$

En divisant par $v(\ln(v) - 1)$ on a perdu la solution $v(x) = e$ pour $x \in \mathbb{R}$, qui correspond à $y(x) = ex$ pour $x \in \mathbb{R}$. Or, cette solution est obtenue en prenant $C = 0$ dans (1). Ainsi la solution générale recherchée est (cf. Fig. 1)

$$\left\{ \forall C \in \mathbb{R}, y(x) = x e^{1+Cx}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

ii) Comme vu au cours, on pose $y(x) = xv(x)$, et donc $y' = v + xv'$ et on obtient pour l'équation différentielle homogène

$$y' = \frac{y}{x} \left(\frac{y}{x} + 2 \right)$$

l'équation à variables séparées

$$v + xv' = v(v + 2) \quad \Leftrightarrow \quad xv' = v(v + 1)$$

puis on enclenche la méthode de la séparation des variables :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(v + 1)} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v + 1} \right) dv,$$

et en intégrant on trouve

$$\ln(|v|) - \ln(|v + 1|) = \ln(|x|) - \ln(C), \quad C > 0 \quad \Leftrightarrow \quad C \frac{v}{v + 1} = x, \quad C \neq 0.$$

En substituant $\frac{y}{x}$ pour v ,

$$\frac{C \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} + 1} = x \quad \Leftrightarrow \quad Cy = x(y + x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2}{C - x}. \quad (2)$$

En divisant par $v(v + 1)$ on a perdu les solutions $v = 0$ et $v = -1$ qui correspondent aux solutions $y = 0$ et $y = -x$. Tandis que la dernière est obtenue en prenant $C = 0$ dans (2), la première n'est pas un cas particulier de (2).

La solution générale de l'équation différentielle donnée est ainsi (cf. Fig. 2):

$$\left. \begin{aligned} \forall C \neq 0, \frac{x^2}{C - x}, & \quad x \in]-\infty, C[\ ; \\ \forall C \neq 0, \frac{x^2}{C - x}, & \quad x \in]C, \infty[\ ; \\ -x, & \quad x \in \mathbb{R} \ ; \\ 0, & \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\}$$

iii) On commence de la même manière pour les trois cas: on récrit l'équation donnée en divisant le numérateur et le dénominateur par x avant de faire le changement de variable $y \rightarrow v = \frac{y}{x}$, $y' = v + xv'$:

$$y' = \frac{a + b \frac{y}{x}}{c + d \frac{y}{x}} =: g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad v + xv' = g(v) = \frac{a + bv}{c + d \cdot v}.$$

Si $d \neq 0$ (ce qui correspond au cas plus intéressant), on obtient l'équation

$$\begin{aligned} x \frac{dv}{dx} &= \frac{a + bv - v(c + d \cdot v)}{c + d \cdot v} = \frac{a + (b - c)v - d \cdot v^2}{c + d \cdot v} \\ \Leftrightarrow & \frac{c + d \cdot v}{a + (b - c)v - d \cdot v^2} dv = \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v + \frac{c}{d}}{v^2 + \frac{c-b}{d}v - \frac{a}{d}} dv = -\frac{dx}{x} \end{aligned}$$

qu'on doit intégrer des deux côtés (notez bien la différence entre dv et $d \cdot v$).

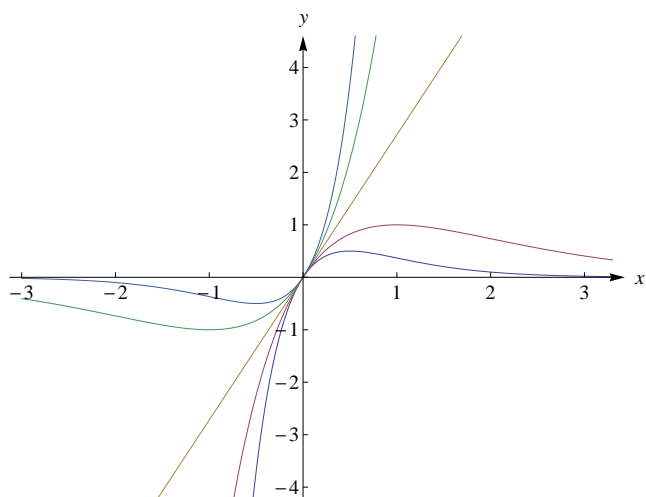


Figure 1

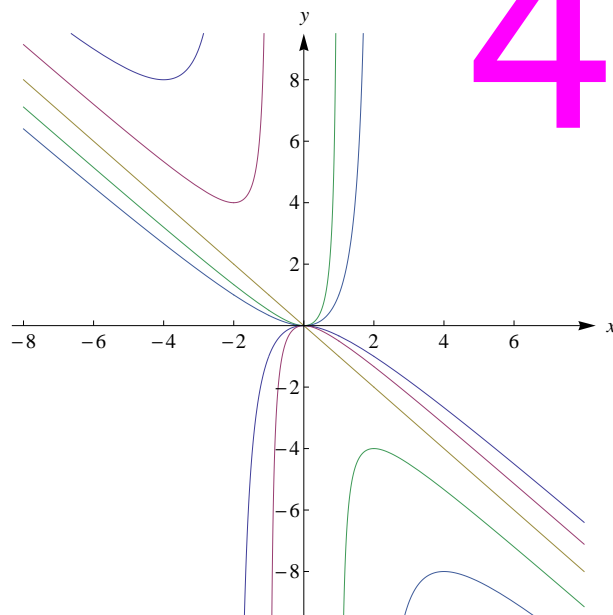


Figure 2

- 1) Dans ce cas le membre de gauche est $\frac{v - \frac{3}{2}}{v^2 - 2v - 1}$. Pour l'intégrer, on doit le décomposer en éléments simples (cf. Analyse I). La décomposition dépend des racines du dénominateur qui sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

La fonction rationnelle s'écrit alors

$$\frac{v - \frac{3}{2}}{v^2 - 2v - 1} = \frac{A}{v - \lambda_1} + \frac{B}{v - \lambda_2} = \frac{(A + B)v - A\lambda_2 - B\lambda_1}{v^2 - 2v - 1},$$

ce qui mène au système

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A\lambda_2 + B\lambda_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ainsi $A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{8}(4 - \sqrt{2})$ et $B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{8}(4 + \sqrt{2})$. Pour simplifier la notation on continue d'écrire $A, B, \lambda_1, \lambda_2$ pour l'instant. L'intégrale est alors

$$\int \frac{v - \frac{3}{2}}{v^2 - 2v - 1} dv = \int \frac{A}{v - \lambda_1} dv + \int \frac{B}{v - \lambda_2} dv = A \ln(|v - \lambda_1|) + B \ln(|v - \lambda_2|)$$

si bien que la solution $v(x)$ de l'équation différentielle satisfait (pour $C > 0$)

$$A \ln(|v - \lambda_1|) + B \ln(|v - \lambda_2|) = -\ln(|x|) + \ln(C) \Leftrightarrow |v - \lambda_1|^A |v - \lambda_2|^B = \frac{C}{|x|}.$$

En remplaçant $v = \frac{y}{x}$ on a

$$\left| \frac{y}{x} - \lambda_1 \right|^A \left| \frac{y}{x} - \lambda_2 \right|^B = \frac{C}{|x|} \Leftrightarrow |y - \lambda_1 x|^A |y - \lambda_2 x|^B = C|x|^{A+B-1}.$$

Or, $A + B = 1$ (cf. plus haut), ce qui fait qu'on obtient finalement

$$\left| y(x) - (1 + \sqrt{2})x \right|^{\frac{4-\sqrt{2}}{8}} \left| y(x) - (1 - \sqrt{2})x \right|^{\frac{4+\sqrt{2}}{8}} = C, \quad C > 0$$

Comme les deux exposants ne sont pas égaux, on ne peut pas isoler y dans cette équation, la solution est donc donnée sous forme implicite.

- 2) Dans ce cas le membre de gauche est $\frac{v+5}{v^2+2v+1} = \frac{v+5}{(v+1)^2}$. Son intégrale est alors

$$\int \frac{v+5}{(v+1)^2} dv = \int \frac{v+1}{(v+1)^2} dv + \int \frac{4}{(v+1)^2} dv = \ln(|v+1|) - \frac{4}{v+1},$$

et donc la solution $v(x)$ de l'équation différentielle satisfait (pour $C > 0$)

$$\ln(|v+1|) - \frac{4}{v+1} = -\ln(|x|) + \ln(C) \quad \Leftrightarrow \quad |v+1| \exp\left(-\frac{4}{v+1}\right) = \frac{C}{|x|}.$$

En remplaçant $v = \frac{y}{x}$ on a

$$\left| \frac{y}{x} + 1 \right| \exp\left(-\frac{4}{\frac{y}{x} + 1}\right) = \frac{C}{|x|} \quad \Leftrightarrow \quad |y+x| \exp\left(-\frac{4x}{y+x}\right) = C, \quad C > 0$$

Comme avant, on ne peut pas donner une solution explicite pour cette équation.

- 3) Dans ce cas le membre de gauche est $\frac{v-\frac{3}{2}}{v^2-v+\frac{1}{2}}$. Le discriminant du dénominateur vaut -1 , c'est-à-dire il n'y a pas de racines réelles. Il n'y a donc pas de décomposition plus simple pour intégrer cette fonction rationnelle de sorte qu'on doit faire des manipulations bien choisies en haut et en bas pour intégrer.

$$\begin{aligned} \int \frac{v-\frac{3}{2}}{v^2-v+\frac{1}{2}} dv &= \int \frac{\frac{1}{2}(2v-1) - 1}{v^2-v+\frac{1}{2}} dv \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2v-1}{v^2-v+\frac{1}{2}} dv - \int \frac{1}{(v-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} dv \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{q'(v)}{q(v)} dv - \int \frac{1}{u^2 + (\frac{1}{2})^2} du, \end{aligned}$$

où $q(v) = v^2 - v + \frac{1}{2}$ et $u = v - \frac{1}{2}$, $u' = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{v-\frac{3}{2}}{v^2-v+\frac{1}{2}} dv &= \frac{1}{2} \ln(|q(v)|) - 2 \arctan(2u) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\left|v^2 - v + \frac{1}{2}\right|\right) - 2 \arctan(2v-1) \end{aligned}$$

et donc la solution $v(x)$ de l'équation différentielle satisfait (pour $C > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln\left(\left|v^2 - v + \frac{1}{2}\right|\right) - 2 \arctan(2v-1) &= -\ln(|x|) + \ln(C) \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{\left|v^2 - v + \frac{1}{2}\right|} \exp(-2 \arctan(2v-1)) &= \frac{C}{|x|}. \end{aligned}$$

En remplaçant $v = \frac{y}{x}$ on a

$$\sqrt{\left| \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \right|} \exp\left(-2 \arctan\left(\frac{2y}{x} - 1\right)\right) = \frac{C}{|x|}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left| y^2 - xy + \frac{x^2}{2} \right|} \exp\left(-2 \arctan\left(\frac{2y-x}{x}\right)\right) = C, \quad C > 0$$

Comme pour les deux cas précédents, la solution peut seulement être donnée sous forme implicite.

On a donc pu observer que les solutions y de l'équation différentielle $y' = \frac{ax + by}{cx + dy}$ satisfont $f(x, y) = C$ avec $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $C > 0$.

iv) Pour ramener cette équation qui n'est pas homogène à une équation homogène, on fait le changement de variable $x \rightarrow \bar{x} + x_0$, $y \rightarrow \bar{y} + y_0$, où x_0, y_0 sont des constantes à déterminer. Géométriquement ce changement de variable revient à une translation de l'origine par (x_0, y_0) , voir Fig. 3.

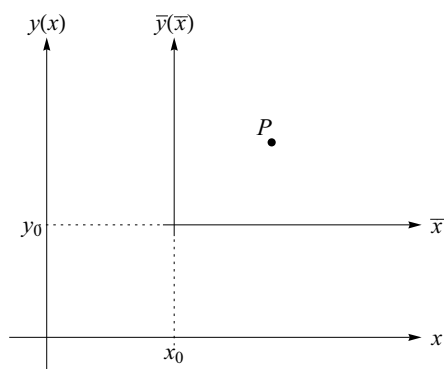


Figure 3

Tout point du plan, comme par exemple P , peut donc être exprimé comme $(x, y(x))$ ou comme $(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$. Les relations entre ces deux expressions sont

$$x = \bar{x} + x_0$$

$$y(x) = \bar{y}(\bar{x}) + y_0,$$

ce qui fait que, puisque $\bar{y}(\bar{x}) = y(\bar{x} + x_0) - y_0$,

$$\bar{y}'(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{\bar{x}+x_0} = y'(\bar{x} + x_0).$$

On peut donc écrire l'équation différentielle en \bar{y}

$$\bar{y}'(\bar{x}) = y'(\bar{x} + x_0) = \frac{a(\bar{x} + x_0) + b(\bar{y}(\bar{x}) + y_0) + r}{c(\bar{x} + x_0) + d(\bar{y}(\bar{x}) + y_0) + s},$$

ou, sous forme plus courte,

$$\bar{y}' = \frac{a\bar{x} + b\bar{y} + ax_0 + by_0 + r}{c\bar{x} + d\bar{y} + cx_0 + dy_0 + s}.$$

On choisit alors x_0 et y_0 tels que

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + r = 0 \\ cx_0 + dy_0 + s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r \\ -s \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} bs - dr \\ cr - as \end{pmatrix}$$

pour autant que $ad - bc \neq 0$. Si ce déterminant est nul, le système a soit une infinité de solutions (c.-à-d. on peut librement choisir x_0 ou y_0), soit il n'a pas de solution et donc on ne peut pas écrire l'équation sous la forme voulue.

On a ainsi une équation de la même forme qu'au *iii*) et on pourrait donc la résoudre de la même manière.

Exercice 3. (Équation de Riccati)

i) Comme y_1 est une solution de l'équation donnée, on obtient pour y , pourvu que $(u(x) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \left(y_1 + \frac{1}{u}\right)' &= a \left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 + b \left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + c \\ \Leftrightarrow y_1' - \frac{u'}{u^2} &= a \left(y_1^2 + 2\frac{y_1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) + b y_1 + b \frac{1}{u} + c \\ \Leftrightarrow -\frac{u'}{u^2} &= 2a\frac{y_1}{u} + \frac{a}{u^2} + \frac{b}{u} \quad \Leftrightarrow \quad u' + (2ay_1 + b)u = -a. \end{aligned}$$

ii) La méthode de *i)* permet de trouver la solution générale de l'équation différentielle de Riccati

$$y' = -\frac{4}{3x}y^2 + \frac{4}{3x}$$

à partir d'une solution particulière trouvée en tâtonnant. C'est le plus facile de chercher une solution constante; en l'occurrence on trouve la solution particulière $y_1 = 1$.

Posons donc $y = y_1 + \frac{1}{u} = 1 + \frac{1}{u}$. Alors u satisfait l'équation différentielle linéaire

$$u' - \frac{8}{3x}u = \frac{4}{3x}. \quad (3)$$

L'équation homogène associée est à variables séparées:

$$\begin{aligned} \frac{du}{8u} = \frac{dx}{3x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u| &= \frac{8}{3} \ln|x| + \ln(\tilde{C}), \quad \tilde{C} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |u| = \tilde{C}|x|^{8/3}, \quad \tilde{C} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad u = \pm\tilde{C}|x|^{8/3}, \quad \tilde{C} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u &= \tilde{C}|x|^{8/3}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned} \quad (4)$$

Pour $\tilde{C} = 0$, on obtient la fonction triviale qui est aussi solution de l'équation homogène associée à (3) si bien que $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ dans (4).

En observant que $u_{\text{part}} = -\frac{1}{2}$ est une solution particulière de (3), on a finalement

$$u(x) = u_{\text{hom}}(x) + u_{\text{part}}(x) = \tilde{C}|x|^{8/3} - \frac{1}{2}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}, \quad x \in]-\infty, 0[\text{ ou } x \in]0, \infty[. \quad (5)$$

Pour $\tilde{C} \neq 0$, la solution y de l'équation de Riccati s'écrit

$$y(x) = 1 + \frac{1}{u(x)} = \frac{\tilde{C}|x|^{8/3} + \frac{1}{2}}{\tilde{C}|x|^{8/3} - \frac{1}{2}} = \frac{|x|^{8/3} + \frac{1}{2\tilde{C}}}{|x|^{8/3} - \frac{1}{2\tilde{C}}} = \frac{|x|^{8/3} + C}{|x|^{8/3} - C}, \quad C \neq 0, \quad (6)$$

Cette fonction n'est pas définie lorsque $|x|^{8/3} - C = 0$, ce qui peut seulement arriver quand $C > 0$ (cf. résumé ci-dessous).

Pour $\tilde{C} = 0$ dans (5), on a $y(x) = 1 + \frac{1}{u(x)} = 1 - 2 = -1$. La solution particulière $y_1(x) = 1$ est obtenue de (6) avec $C = 0$.

En remarquant que contrairement à (3), l'équation de Riccati est aussi définie pour $x = 0$, on résume ses solutions:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y(x) = \frac{|x|^{8/3} + C}{|x|^{8/3} - C}, & C > 0, \quad x \in]-\infty, -C^{3/8}[\text{ ou } x \in]-C^{3/8}, C^{3/8}[\text{ ou } x \in]C^{3/8}, \infty[\\ y(x) = \frac{|x|^{8/3} + C}{|x|^{8/3} - C}, & C < 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ y(x) = 1, & C = 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ y(x) = -1, & C = \infty, \quad x \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Exercice 4. (Équation de Clairaut)

De l'équation

$$(y - xy')^2 = -2y'$$

on obtient les équations de Clairaut $y = xy' + f_{\pm}(y')$ avec

$$f_{\pm}(y') = \pm\sqrt{-2y'}$$

On pose $p = y'$, et on obtient

$$y = xp + f_{\pm}(p).$$

On dérive une fois par rapport à x et l'on obtient

$$p = p + xp' + f'_{\pm}(p)p',$$

si bien que

$$p' (x + f'_{\pm}(p)) = 0.$$

Cette équation a les solutions $p'(x) = 0$ c'est-à-dire $p(x) = C$ et donc pour $C \leq 0$ les droites :

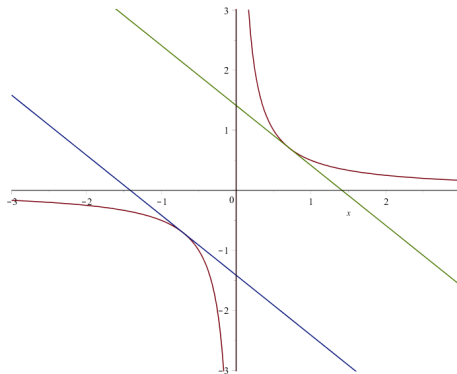
$$y(x) = Cx + f_{\pm}(C) = Cx \pm \sqrt{-2C}.$$

L'autre possibilité est que $x + f'_{\pm}(p) = 0$ et on obtient la solution sous forme paramétrique avec $p \in \mathbb{R}_-$:

$$\begin{aligned} x &= -f'_{\pm}(p) = \pm \frac{1}{\sqrt{-2p}} \\ y &= xp + f_{\pm}(p) = \pm \frac{1}{\sqrt{-2p}} p \pm \sqrt{-2p} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-2p} \end{aligned}$$

ou d'une manière explicite en éliminant p :

$$y(x) = \frac{1}{2x}.$$



Analyse avancée II – Corrigé de la série 4A

Échauffement

L'intérieur $\overset{\circ}{X}$ de X est l'ensemble vide. L'adhérence de X est l'ensemble

$$\bar{X} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Donc on a pour le bord $\partial X = \bar{X} \setminus \overset{\circ}{X} = \bar{X}$. L'ensemble des points isolés est l'ensemble vide, et l'ensemble des points d'accumulation est donc aussi égal à \bar{X} .

Exercice 1.

L'ensemble des points d'accumulation consiste des points dans $\overset{\circ}{X}$ ainsi que des points du bord de X qui ne sont pas des points isolés. Pour $a \in \overset{\circ}{X}$ il existe par définition un $r > 0$ telle que la boule ouverte $B(x, r) \subset \overset{\circ}{X} \subset X$. On considère pour tout entier $k \geq 0$ et $r_k = \frac{r}{k+1}$ la boule ouverte $B(a, r_k) \subset B(x, r) \subset \overset{\circ}{X} \subset X$ et choisit $x_k \in B(a, r_k) \setminus \{a\}$. Par définition de la boule ouverte on a $\|x_k - a\| \leq r_k$ et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| = 0$ ce qui par définition de la limite veut dire que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. Pour les points a non isolés du bord de X on choisit pour tout entier $k \geq 0$ et $r_k = \frac{1}{k+1}$ la boule ouverte $B(a, r_k)$. Par définition des points du bord on a que l'intersection $I_k = B(a, r_k) \cap X \subset X$ est non-vide. Si $a \notin X$ on choisit $x_k \in I_k \subset X$ quelconque. Si $a \in X$, alors $a \in I_k$, mais puisque a n'est pas un point isolé du bord $I_k \subset X$ doit contenir un point $x_k \neq a$, car $I_k = \{a\}$ veut dire par définition que a est isolé. De nouveau, par construction, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| = 0$ ce qui par définition de la limite veut dire que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Exercice 2.

Soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite convergente dans \mathbb{R}^n , c'est-à-dire telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a.$$

Par définition ceci veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\|x_k - a\| \leq \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon = 1$ et k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\|x_k - a\| \leq 1$, et soit

$$C = \max\{\|x_0\|, \dots, \|x_{k_0-1}\|, 1 + \|a\|\}$$

Alors pour tout $k \geq 0$ on a $\|x_k\| \leq C$, car par définition de C

$$\|x_k\| \leq C \text{ pour } k = 0, \dots, k_0 - 1$$

et, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour $k \geq k_0$

$$\|x_k\| \leq \|(x_k - a) + a\| \leq \|a\| + \|x_k - a\| \leq \|a\| + 1.$$

Par définition de C on a donc aussi dans ce deuxième cas que $\|x_k\| \leq C$. La suite est donc bornée car pour tout $k \geq 0$, $x_k \in B(0, C)$.

Exercice 3.

- i) On démontre les bornes entre la norme $\| \cdot \|_2$ et la norme $\| \cdot \|_1$ par récurrence sur n .
- i) Pour $n = 1$ on a pour $x = (x_1) \in \mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$ que $\|x\|_1 = \|x\|_2 = |x_1|$ et les bornes sont donc trivialement satisfaites.
- ii) Soit maintenant $n > 1$ et supposons que pour $y = (x_1, \dots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ les bornes soient satisfaites, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} \|y\|_1 \leq \|y\|_2 \leq \|y\|_1 .$$

Alors on a, pour $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| = \|y\|_1 + |x_n| = \sqrt{\|y\|_1^2 + |x_n|^2 + 2\|y\|_1|x_n|} \geq \sqrt{\|y\|_1^2 + |x_n|^2} \\ &\geq \sqrt{\|y\|_2^2 + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|_2 . \end{aligned}$$

ainsi que,

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \|x\|_2 &= \sqrt{n} \sqrt{\|y\|_2^2 + x_n^2} = \sqrt{n \|y\|_2^2 + n x_n^2} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1} \|y\|_1^2 + n x_n^2} \\ &= \sqrt{\|y\|_1^2 + \frac{1}{n-1} \|y\|_1^2 + x_n^2 + (n-1) x_n^2} \\ &= \sqrt{(\|y\|_1 + |x_n|)^2 - 2\|y\|_1|x_n| + \frac{1}{n-1} \|y\|_1^2 + (n-1) x_n^2} \\ &= \sqrt{(\|y\|_1 + |x_n|)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} \|y\|_1 - \sqrt{n-1} |x_n|\right)^2} \\ &\geq \sqrt{(\|y\|_1 + |x_n|)^2} = \|y\|_1 + |x_n| = \|x\|_1 . \end{aligned}$$

Une démonstration plus élégante mais moins directe utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz que nous verrons dans la série 6B, exercice 1. On peut en effet considérer la norme $\|x\|_1$ comme le produit scalaire entre le vecteur $v_1 = (|x_1|, \dots, |x_n|)^T$ et le vecteur $v_2 = (1, \dots, 1)^T$. Si on a déjà démontré l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient alors directement le résultat souhaité, car $\|x\|_1 = \langle v_1, v_2 \rangle \leq \|v_1\|_2 \|v_2\|_2 = \|x\|_2 \sqrt{n}$.

- ii) Les bornes entre la norme $\| \cdot \|_2$ et la norme $\| \cdot \|_\infty$ sont plus faciles à démontrer. On a :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sqrt{n \max\{x_1^2, \dots, x_n^2\}} = \sqrt{n} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

ainsi que, avec $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| = \sqrt{x_{i_0}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|_2 .$$

Exercice 4.

Soit a un point quelconque de \mathbb{R}^n , et $\|\cdot\|$ une norme. Il faut montrer que pour toute suite $(x_k)_{k \geq 0}$ dans \mathbb{R}^n , $x_k \neq a$, telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ (donc par définition telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|_2 = 0$), on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|a\|.$$

Pour commencer, puisque toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes, on a $\|x_k - a\| \leq C \|x_k - a\|_2$ pour une certaine constante $C > 0$ et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| = 0$ pour toutes les suites sous considération. De l'inégalité triangulaire on obtient :

$$\begin{aligned} \|x_k\| - \|a\| &= \|x_k - a + a\| - \|a\| \\ &\leq \|x_k - a\| + \|a\| - \|a\| = \|x_k - a\| \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \|a\| - \|x_k\| &= \|a - x_k + x_k\| - \|x_k\| \\ &\leq \|a - x_k\| + \|x_k\| - \|x_k\| = \|a - x_k\| \end{aligned}$$

et donc

$$\left| \|x_k\| - \|a\| \right| \leq \|x_k - a\| ,$$

de sorte que

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \|x_k\| - \|a\| \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\| = 0 .$$

Toute norme définit donc une fonction continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Exercice 5.

- l'ensemble D n'est ni fermé, ni borné.
- l'ensemble D est borné mais pas fermé.
- l'ensemble D est fermé mais pas borné.
- l'ensemble D est fermé et borné.

En effet, l'expression est bien définie si $4 - (x + y)^2 > 0$ ce qui est équivalent à

$$-2 < x + y < 2 .$$

Les équations $-2 = x + y \Leftrightarrow y = -2 - x$ et $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$ définissent deux droites parallèles et D est l'ensemble des points entre ces deux droites. L'ensemble est donc ouvert et non borné.

Exercice 6.

Pour la vitesse instantanée on a $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)^T$ avec $\|f'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, et on trouve pour la longueur du chemin

$$l = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

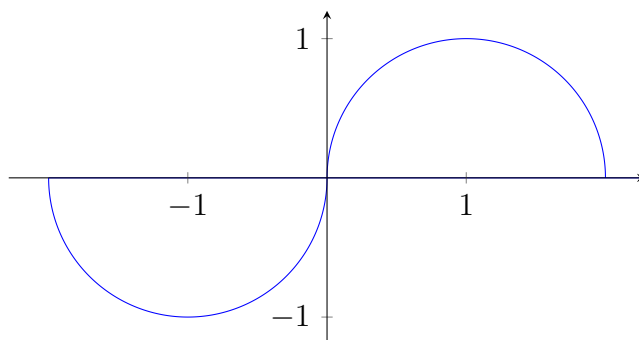
Exercice 7.

- i) Les fonctions $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_1(t) = (1 + \cos(t), \sin(t))^T$, $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_2(t) = (-1 - \cos(t), \sin(t))^T$ et $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_3(t) = (-2 - 2\pi + t, 0)^T$ sont différentiables sur \mathbb{R} et donc en particulier continues sur \mathbb{R} . Puisque $f_1(\pi) = f_2(\pi)$ et $f_2(2\pi) = f_3(2\pi)$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pi^+} f(t) = f(\pi) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 2\pi^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2\pi^+} f(t) = f(2\pi)$$

ce qui montre que la fonction f est continue.

- ii) La trace de f est (le segment $[-2, 2]$ fait partie de la trace)



- iii) La fonction f n'est pas injective car on a :

$$f(0) = f(2\pi + 4) = (2, 0)$$

ou encore

$$f(\pi) = f(2\pi + 2) = (0, 0) .$$

- iv) La fonction f n'est pas différentiable à $t = 2\pi$, mais f_1 , f_2 et f_3 sont différentiables. On a :

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi} \|f_1'(t)\| dt + \int_{\pi}^{2\pi} \|f_2'(t)\| dt + \int_{2\pi}^{2\pi+4} \|f_3'(t)\| dt \\ &= \int_0^{\pi} 1 dt + \int_{\pi}^{2\pi} 1 dt + \int_{2\pi}^{2\pi+4} 1 dt \\ &= 2\pi + 4 . \end{aligned}$$

Exercice 8.

- $(x, y, z) = (t \cos(2\pi t), 2t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- $(x, y, z) = (t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- $(x, y, z) = (2t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- $(x, y, z) = (2 \cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$

Analyse avancée II – Corrigé de la série 4B

Échauffement. (Linéarité)

- i)* Soit $y = \alpha y_1 + \beta y_2$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y'' + p(x)y' + q(x)y = (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)' + q(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1'' + \beta y_2'') + p(x)(\alpha y_1' + \beta y_2') + q(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + \beta(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = \alpha r(x) + \beta r(x) = (\alpha + \beta)r(x) = r(x)$.
- ii)* Soit $y = y_1 - y_2$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y'' + p(x)y' + q(x)y = (y_1 - y_2)'' + p(x)(y_1 - y_2)' + q(x)(y_1 - y_2) = (y_1'' - y_2'') + p(x)(y_1' - y_2') + q(x)(y_1 - y_2) = (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) - (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = r(x) - r(x) = 0$.
- iii)* Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation homogène et soit $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Alors, par la linéarité de la dérivée on a $y'' + p(x)y' + q(x)y = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = (c_1 y_1'' - c_2 y_2'') + p(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$.

Exercice 1. (Réduction de l'ordre)

Toute solution d'une équation différentielle linéaire est définie sur l'intervalle I sur lequel les fonctions p et q sont continues (voir le cours). Ceci dit, il se peut que la fonction U de la méthode des facteurs intégrant ne soit pas définie en les points où la solution y_1 s'annule (voir l'exemple du point *ii*). Le produit $U y_1$ pourra néanmoins être définie sur tout I par prolongement par continuité (et sera de classe C^2 sur I).

- i)* Supposons que $J \subset I$ est un intervalle sur lequel y_1 ne s'annule pas et soit $y = U y_1$ une solution sur J . Alors $y' = u y_1 + U y_1'$ et $y'' = u' y_1 + 2u y_1' + U y_1''$, et on obtient $y'' + p(x)y' + q(x)y = u' y_1 + 2u y_1' + U y_1'' + p(x)(u y_1 + U y_1') + q(x)U y_1 = U(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + u(2y_1' + p(x)y_1) + u' y_1 = 0$. Puisque y_1 est une solution de l'équation ceci se réduit à l'équation différentielle du premier ordre pour u :

$$y_1(x)u' + (p(x)y_1(x) + 2y_1'(x))u = 0,$$

ou encore (sur tout intervalle $J \subset I$, tel que $\forall x \in J, y_1(x) \neq 0$),

$$u' + \left(p(x) + 2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \right) u = 0.$$

- ii)* On pose $y(x) = U(x) \sin(x)$ et l'on obtient l'équation

$$\sin(x)u' + 2 \cos(x)u = 0,$$

qu'il faut résoudre sur les intervalles ouverts où $\sin(x)$ ne s'annule pas. Par séparation des variables on trouve (on écrira pas les constantes multiplicatives arbitraires)

$$u(x) = -\frac{1}{\sin(x)^2}$$

puis on intègre pour obtenir

$$U(x) = \cot(x)$$

et donc la deuxième solution $\cos(x) = \cot(x) \sin(x)$. On voit bien que la fonction $\cos(x) = \cot(x) \sin(x)$ n'est pas définie en les points où $\sin(x)$ s'annule, mais que le produit $\cos(x) = \cot(x) \sin(x)$ est néanmoins défini (et de classe C^2) sur tout \mathbb{R} .

Exercice 2. (Deuxième ordre à coefficients constants)

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = 0$.

- i) De l'équation caractéristique $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ on obtient une première solution $y_1(x) = e^{\lambda x}$ avec $\lambda = -\frac{b}{2a}$ (cas où $b^2 - 4ac = 0$). On pose $y_2 = U y_1$, avec U une primitive d'une nouvelle fonction inconnue u . Pour u on obtient l'équation (voir Exercice 1.),

$$au' + \left(b + 2a \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \right) u = au' + (b + 2a\lambda)u = 0,$$

et donc, puisque $b + 2a\lambda = 0$, $u' = 0$. Donc $u = 1$ (ou n'importe quelle autre constante non nulle), et donc $U(x) = x$ (par exemple) et une deuxième solution est donc $y_2(x) = xe^{\lambda x}$.

- ii) C'est le cas où l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées, $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ ce qui donne deux solutions complexes conjuguées $e^{\lambda x}$ et $e^{\bar{\lambda}x}$. Pour obtenir une solution réelle on pose $C = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2)$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et on pose

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C e^{\lambda x} + \bar{C} e^{\bar{\lambda}x} = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2) e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2}(C_1 + iC_2) e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{aligned}$$

Exercice 3. (Wronskien)

Soient p, q et r des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

Remarque : nous donnons ici pour le point ii) des arguments basés uniquement sur l'équation différentielle satisfaite par le Wronskien et le théorème d'existence et d'unicité pour des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} . Il est conseillé de revenir sur ce point une fois que nous aurons vu le théorème d'existence et d'unicité pour des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^m .

- i) S'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, y_1(x) = c y_2(x)$ alors $\forall x \in I, w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = c \cdot 0 = 0$.
- ii) On a $w' = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = -y_1(p(x)y_2' + q(x)y_2) + (p(x)y_1' + q(x)y_1) y_2 = -p(x)w$ et donc

$$w(x) = c e^{-P(x)},$$

avec P une primitive de p et c une constante. Par le théorème d'existence et d'unicité cette solution est unique et le Wronskien est donc ou bien non-nul ou identiquement nul sur I (théorème d'Abel), et puisque par hypothèse $w(x_0) = 0$ on trouve que $\forall x \in I,$

$$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 0.$$

Ceci est une équation différentielle du premier ordre pour y_2 donné y_1 (ou vice-versa). Il faut considérer plusieurs cas.

- (a) $\forall x \in I, y_1(x) = 0$. Alors les fonction y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.
- (b) $\forall x \in I, y_1'(x) = 0$, c'est-à-dire y_1 est une fonction constante non nulle sur I . Alors l'équation différentielle pour y_2 se réduit à $\forall x \in I, y_2'(x) = 0$. La fonction y_2 est alors aussi constante et les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.
- (c) Il existe $x_1 \in I$ tel que $y_1'(x_1) \neq 0$. Alors, par le théorème d'existence et d'unicité on a que $y_2(x) = (y_2'(x_1)/y_1'(x_1))y_1(x)$, car ceci est une solution de l'équation différentielle pour y_2 et c'est l'unique solution telle que $y_2(x_1) = (y_2'(x_1)/y_1'(x_1))y_1(x_1)$. Les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.
- iii) Par le théorème d'existence et d'unicité¹ il existent des solutions y_1 et y_2 telles que pour un $x_0 \in I$ $y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0$ et $y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1$. Vu que $w(x_0) = 1 \neq 0$ les deux solutions sont linéairement indépendantes et la dimension de l'espace vectoriel est donc au moins deux. Soit y_3 une autre solution et soit la combinaison linéaire suivante de y_1 et y_2 : $y = y_3(x_0)y_1 + y_3'(x_0)y_2$. On a $y(x_0) = y_3(x_0)$ et $y'(x_0) = y_3'(x_0)$ et donc $y_3 = y$ par l'unicité¹ des solutions. La dimension de l'espace des solutions est donc deux.

¹Nous anticipons ici le théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles d'ordre n pour lesquelles une condition initiale est spécifiée en se donnant $y(x_0), \dots, y^{n-1}(x_0)$.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 5A

Échauffement 1.

Les fonctions f et g sont de classe C^1 sur leur domaine de définition. La fonction h est continue sur son domaine de définition $[-1, 1]$ et de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$. Soit $\omega(t) = t/2$. Alors $g(\omega(t)) = f(t)$ pour tout $t \in [0, \pi]$ et $\omega: [0, \pi] \rightarrow [0, \pi/2]$ est de classe C^1 , strictement croissante et surjective et la fonction ω' ne s'annule en aucun point. Les fonctions f et g sont donc des chemins C^1 -équivalents et en conclusion des paramétrisations de la même courbe de classe C^1 . Soit $\omega_0(t) = \cos(t)$. Alors $h(\omega_0(t)) = f(t)$ pour tout $t \in [0, \pi]$ et $\omega_0: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est continue, strictement décroissante et surjective. La fonction ω_0 est en fait de classe C^1 , mais la fonction dérivée ω_0' s'annule en $t = 0$ et en $t = \pi$. Le chemin h est donc équivalent au chemin f au sens des chemins continus, mais pas au sens des chemins de classe C^1 . Les fonctions f , g et h sont donc des paramétrisations de la courbe $\langle f \rangle$, mais seulement f et g sont des paramétrisations de la courbe $\langle f \rangle$ vue comme courbe de classe C^1 . A noter que f est la paramétrisation canonique de cette courbe de classe C^1 .

Exercice 1.

Supposons que $f = (f_1, \dots, f_m)^T : I_1 = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g = (g_1, \dots, g_m)^T : I_2 = [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ soient des paramétrisations de classe C^1 d'une courbe de classe C^1 . Alors, par définition, il existe une fonction de classe C^1 $\omega: I_1 \rightarrow I_2$, telle que pour tout $t \in I_1$, $g(\omega(t)) = f(t)$. Par conséquent $f_i(t) = g_i(\omega(t))$ pour $i = 1, \dots, m$ et par la dérivée en chaîne pour des fonctions d'une variable (voir Analyse I) on obtient que $f'_i(t) = g'_i(\omega(t))\omega'(t)$ pour $i = 1, \dots, m$. Par la linéarité on obtient du coup que pour tout $t \in I_1$,

$$f'(t) = \omega'(t) g'(\omega(t)).$$

Par la définition de la longueur du chemin f et par la propriété de la homogénéité d'une norme on a

$$|f| = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|\omega'(t) g'(\omega(t))\| dt = \int_a^b |\omega'(t)| \|g'(\omega(t))\| dt.$$

La fonction ω est par définition strictement monotone et on a donc ou bien que pour tout $t \in I_1$, $\omega'(t) > 0$ ou bien que pour tout $t \in I_1$, $\omega'(t) < 0$. Dans le premier cas on obtient que

$$|f| = \int_a^b \omega'(t) \|g'(\omega(t))\| dt,$$

et en posant le changement de variables $t = \varphi(s) = \omega^{-1}(s)$ on obtient, en utilisant que $\varphi'(s) = \frac{1}{\omega'(\omega^{-1}(s))}$, que

$$|f| = \int_c^d \omega'(\omega^{-1}(s)) \|g'(\omega(\omega^{-1}(s)))\| \frac{1}{\omega'(\omega^{-1}(s))} ds = \int_c^d \|g'(s)\| ds = |g|.$$

Dans le deuxième cas on a que

$$|f| = \int_d^c (-\omega'(\omega^{-1}(s))) \|g'(\omega(\omega^{-1}(s)))\| \frac{1}{\omega'(\omega^{-1}(s))} ds = \int_c^d \|g'(s)\| ds = |g|.$$

Exercice 2.

Notons pour commencer que $-\cos(\varepsilon) = \cos(\pi - \varepsilon)$. Sur leurs domaines restreints respectifs les paramétrisations f et h sont donc C^1 -équivalentes (voir l'Échauffement 1.). On a donc (voir Exercice 1.) que pour tout $\varepsilon \in]0, \pi/2[$,

$$|f| = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \|f'(t)\| dt = \int_{\cos(\pi-\varepsilon)}^{\cos(\varepsilon)} \|h'(t)\| dt = |h|.$$

On a $\|f'(t)\| = 1$ et

$$\|h'(t)\| = \left\| \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \right)^T \right\| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

et donc

$$\pi - 2\varepsilon = \int_{\cos(\pi-\varepsilon)}^{\cos(\varepsilon)} \|h'(t)\| dt = 2 \int_0^{\cos(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

ce qui implique que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\cos(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3.

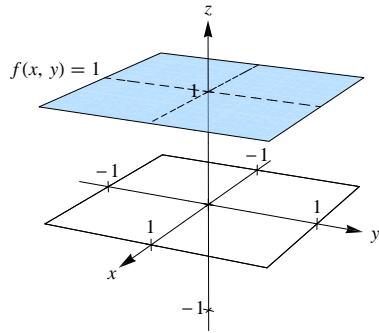
On a par définition que

$$W = \int_0^{2\pi} \left\langle (-\sin(t), \cos(t))^T, (-\sin(t), \cos(t))^T \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

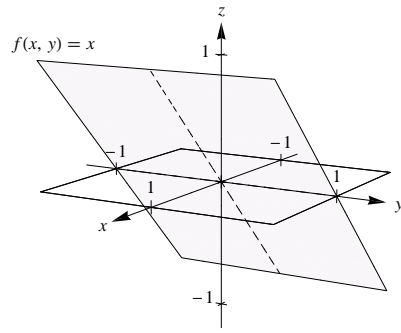
Échauffement 2.

Les lignes hachurées sont les images des axes x et y par la fonction f .

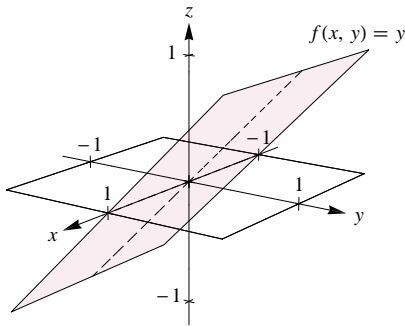
i) $V(f) = \{1\}$



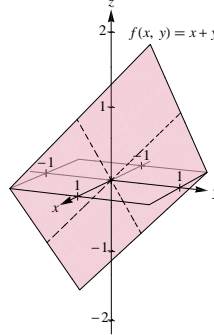
ii) $V(f) = [-1, 1]$



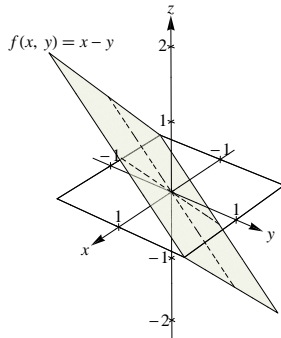
iii) $V(f) = [-1, 1]$



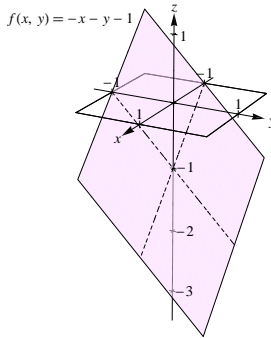
iv) $V(f) = [-2, 2]$



v) $V(f) = [-2, 2]$



vi) $V(f) = [-3, 1]$



Exercice 4.

a) On a $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 3y}{x + 2y^2} = \frac{4 - 3}{2 + 2} = \frac{1}{4}$.

b) On utilise les coordonnées polaires: $\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases}$. Ainsi $x^2 + y^2 = r^2$ et donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1 \quad (\text{Fig. 1}).$$

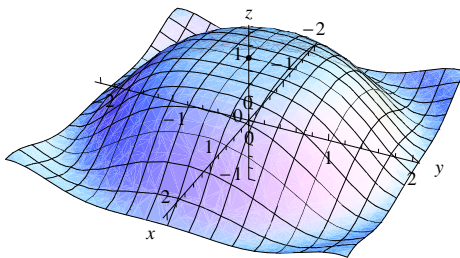


Fig. 1: La limite est représentée par le point noir.

c) Sur une suite de points de la forme $(x_n, 0)$, avec $x_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, 0) = \frac{x_n \cdot 0^2}{x_n^2 + 0^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. D'autre part, sur une suite de points (y_n^2, y_n) avec $y_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n^2, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^2 y_n^2}{(y_n^2)^2 + y_n^4} = \frac{1}{2}$. Donc la limite n'existe pas.

d) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ avec $x \neq 0$ on a

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + 0} \right| \leq |y|,$$

et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ avec $x = 0$ on a $f(x, y) = 0$. On a donc dans tous les cas que $|f(x, y)| \leq |y|$. Soit (x_n, y_n) une suite telle que $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$. Par la Proposition 2.6 du cours on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n, y_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0$. Par la définition de la limite ceci implique que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

Exercice 5.

a) On a

$$\frac{|x|^{3/2}|y|^{3/2}}{x^2 + y^4} = \frac{|x|^{3/2}}{(x^2 + y^4)^{3/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(x^2 + y^4)^{1/4}} \leq \frac{|x|^{3/2}}{(x^2)^{3/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(y^4)^{1/4}} \leq \sqrt{|y|},$$

et la limite vaut donc zéro.

b) Le long d'une suite épointée de la forme $(x_n, 0)$ on a

$$\frac{|x_n|^{3/2}|0|}{x_n^2 + 0^4} = 0,$$

tandis que le long d'une suite épointée de la forme (y_n^2, y_n) on a

$$\frac{|y_n^2|^{3/2}|y_n|}{y_n^4 + y_n^4} = \frac{1}{2},$$

et la limite n'existe donc pas.

c) On a que

$$\left| \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)} \right| = \left| \frac{x^3}{x^2 + y^4} \right| \left| \frac{y^2}{x^4 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + 0^4} \right| \left| \frac{y^2}{0^4 + y^2} \right| \leq |x|,$$

et la limite vaut donc zéro.

d) On a que

$$\frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)} = \frac{|x|^{7/2}}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)^{1/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(x^4+y^2)^{3/4}},$$

et donc

$$\frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)} \leq \frac{|x|^{7/2}}{(x^2+0^4)(x^4+0^2)^{1/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(0^4+y^2)^{3/4}} \leq \sqrt{|x|},$$

ce qui implique que la limite vaut zéro.

Exercice 6.

i) En passant en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases}$ on a

$$3x^3 - 2y^3 = r^3 (3 \cos^3(\varphi) - 2 \sin^3(\varphi)) \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

et donc

$$f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = r (3 \cos^3(\varphi) - 2 \sin^3(\varphi)),$$

et on trouve que pour tout $\varphi \in [0, 2\pi[$, $|f(x, y)| \leq 5r$, ce qui implique que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| \leq \lim_{r \rightarrow 0} 5r = 0,$$

et par conséquence

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Il s'en suit que la fonction $\hat{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de la fonction f en $(0, 0)$. Le graphe de \hat{f} se trouve à la Fig. 2.

ii) On considère les limites de deux cas particuliers de f :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{5x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Par conséquent $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas et la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ n'admet donc pas de prolongement par continuité en $(0, 0)$ (voir Fig. 3 pour le graphe).

iii) On utilise encore une fois les coordonnées polaires $\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \end{cases}$. Ainsi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(r)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(r)^2}{r^2(1 + \cos(r))} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(r)}{r} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(r)} = \frac{1}{2}$$

La fonction $\hat{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2}, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est donc le prolongement par continuité de f en $(0, 0)$ (graphe de \hat{f} à la Fig. 4).

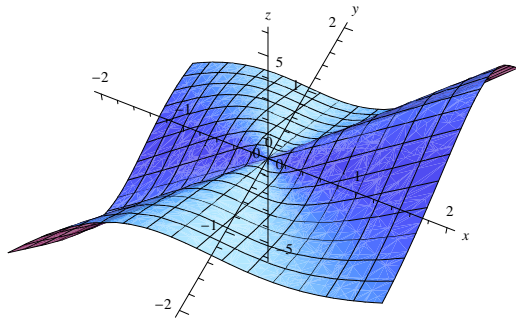


Fig. 2

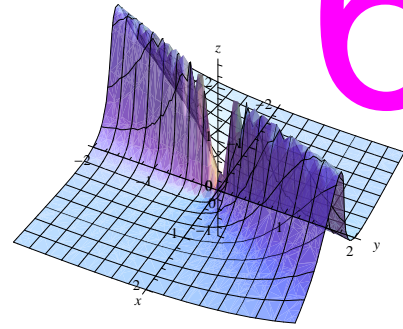


Fig. 3

iv) Comme on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \frac{0}{4t^4} = 0,$$

on devrait avoir $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ pour qu'un prolongement par continuité de f en $(0, 0)$ existe. Or, en considérant la limite $f(2t, t)$ on trouve

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(2t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} 2t^2 \frac{4t^2 - t^2}{(4t^2 + t^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{6t^4}{25t^4} = \frac{6}{25} \neq 0.$$

Ainsi f ne peut pas être prolongé par continuité au point $(0, 0)$ (voir Fig. 5).

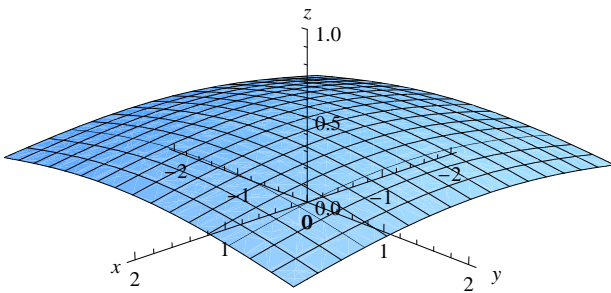


Fig. 4

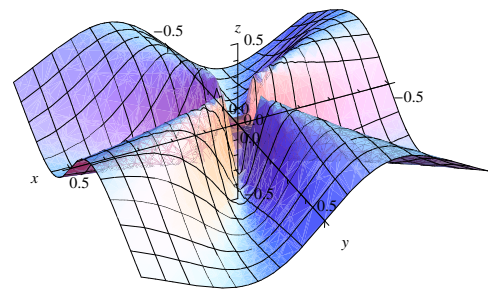


Fig. 5

Exercice 7. (V/F : limites et continuité)

Q1: Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe, alors f est continue en (x_0, y_0) .

Réponse : faux. *L'existence de la limite ne suffit pas, il faut en plus que cette limite soit égale à la valeur de f en (x_0, y_0) , c'est-à-dire que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.*

Q2: Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et soit une fonction $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = 0$. S'il existe une valeur φ_0 de $\varphi \in [0, 2\pi[$ telle que

$$|f(r \cos(\varphi_0), r \sin(\varphi_0))| \leq g(r)$$

pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Réponse : faux. *Contre-exemple : soit $f(x, 0) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x, y) = 1$ sinon, et soit $g(r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$. Alors pour $\varphi = 0$ on a pour tout $r \in \mathbb{R}^+$,*

$$0 = |f(r, 0)| = |f(r \cos(0), r \sin(0))| \leq 0 = g(r),$$

mais la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Q3: Faux. Il ne suffit pas de regarder les limites de la forme

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha t, \beta t) = 0$$

(limites le long de droites) pour montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

ou encore l'existence de cette limite (voir les contre-exemples du cours).

Exercice 8.

La fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

n'admet pas de limite en $(0,0)$ mais on peut vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, \alpha t^2) = 0$.

Exercice 9.

C'est **faux**. La première limite est une limite épointée dans \mathbb{R} , tandis que la deuxième est une limite épointée dans \mathbb{R}^2 . Prenons par exemple $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$ existe, mais $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, 0)$ n'existe pas.

En effet, dans la première limite on considère la fonction d'une variable $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $g(x) = f(x, 0)$ et on a que $g(x) = 0$ si $x \neq 0$ et que $g(0) = 1$, et

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) := \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

La deuxième limite est dans \mathbb{R}^2 . On considère donc la fonction $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = f(x, 0)$ et on a que

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, 0) := \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(x, y).$$

Prenons la suite $(x_n, 0)$ avec $x_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n, 0) = 0$. D'autre part, si on prend la suite $(0, y_n)$ avec $y_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} h(0, y_n) = 1$. Donc la limite

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(x, y)$ n'existe pas.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 5B

Echauffement. (Fonctions définies par des séries)

i) On a $f(x) = g(x \ln(x))$, où $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$, et cette série converge absolument pour tout z (le rayon de convergence z est $+\infty$). La fonction f est donc bien définie. (A noter que $g(z) = e^{-z}$, et donc $f(x) = x^{-x}$, mais le but de cet échauffement est d'utiliser la représentation par la série).

ii) La série qui définit g peut être dérivée terme par terme :

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} z^{n-1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n = -g(z)$$

et donc, par dérivation en chaîne, $f'(x) = g'(x \ln(x)) (\ln(x) + 1) = -g(x \ln(x)) (\ln(x) + 1) = -f(x) (\ln(x) + 1)$ et donc $f' + (\ln(x) + 1) f = 0$.

iii) Par séparation des variables l'on obtient que $y(x) = Ce^{-x \ln(x)} = Cx^{-x}$. Avec $f(1) = g(0) = 1$ on trouve que $C = 1$ et donc $f(x) = x^{-x}$ et donc $f(2) = \frac{1}{4}$.

Exercice 1. (Fonctions définies par des séries)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{3n}$.

i) On par le critère de d'Alambert

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(3n)!}}{\frac{1}{(3(n+1))!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(3n+3)(3n+2)(3n+1)| = +\infty.$$

ii) A partir de f on obtient en dérivant terme par terme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{3n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{3n} \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} (3n) x^{3n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-1)!} x^{3n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} (3n)(3n-1) x^{3n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)!} x^{3n-2} \end{aligned}$$

et donc

$$(f + f' + f'')(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(3n-2)!} x^{3n-2} + \frac{1}{(3n-1)!} x^{3n-1} + \frac{1}{(3n)!} x^{3n} \right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x.$$

iii) Par la méthode des coefficients indéterminés on trouve que la solution générale de l'équation différentielle pour f est

$$f(x) = \frac{1}{3}e^x + C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

En évaluant la série pour f et pour f' en $x = 0$ on obtient que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, ce qui donne pour C_1 et C_2 les équations

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{3} + C_1 = 1 \\ f'(0) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne $C_1 = \frac{2}{3}$ et $C_2 = 0$. On a donc que

$$f(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

et on peut maintenant déterminer la somme demandée en évaluant la fonction f en $x = 1$:

$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}e + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1.168058313\dots$$

Exercice 2. (Equations indépendantes de x)

On constate que $y(x) = 0$ est une solution sur \mathbb{R} . De plus, l'équation étant autonome, si $y(x)$ est une solution de l'équation, alors $\forall C_1 \in \mathbb{R}$, $y(x + C_1)$ est aussi une solution (sur le domaine translaté). On pose $y'(x) = u(y(x))$ avec $u(t)$ une nouvelle fonction inconnue. Donc $y''(x) = u'(y(x))y'(x) = (u'u)(y(x))$ et, en substituant dans l'équation, on trouve pour u l'équation différentielle

$$u'u - \frac{t}{1+t^2} (u^2 + 1) = 0$$

que l'on peut résoudre facilement par séparation des variables et l'on obtient pour $C > 0$:

$$\frac{1}{2} \ln(1 + u^2) = \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + \frac{1}{2} \ln(C),$$

ou encore, pour $C > 0$,

$$1 + u(t)^2 = C(1 + t^2).$$

Pour $C > 0$, $C \neq 1$ on obtient alors

$$u(t) = \pm \sqrt{Ct^2 + C - 1},$$

et pour $C = 1$

$$u(t) = \pm t,$$

avec $t \in \mathbb{R}$ si $C \geq 1$ et $|t| > \sqrt{\frac{1-C}{C}}$ si $0 < C < 1$.

Finalement, **il ne faut pas oublier** de résoudre pour les différents cas l'équation $y' = a(y)$. C'est-à-dire, si $C > 0$, $C \neq 1$, l'équation

$$y' = \pm \sqrt{C y^2 + C - 1},$$

et, si $C = 1$, les équations

$$y' = \pm y$$

i) $C > 1$

Par séparation des variables on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{C}{C-1}} y \right) = \pm (x + C_1),$$

avec $C_1 \in \mathbb{R}$. On obtient donc, pour chaque $C > 1$ donné, et quelque soit $C_1 \in \mathbb{R}$, la solution

$$y(x) = \sqrt{\frac{C-1}{C}} \sinh \left(\pm \sqrt{C} (x + C_1) \right),$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

ii) $C = 1$

Quelque soit $C_1 \in \mathbb{R}$ on a les solutions

$$y(x) = \pm e^{\pm(x+C_1)},$$

avec $x \in \mathbb{R}$, ainsi que la solution

$$y(x) = 0,$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

iii) $0 < C < 1$

Par séparation des variables on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{C}{1-C}} y \right) = \pm (x + C_1),$$

avec $C_1 \in \mathbb{R}$. On obtient donc, pour chaque $0 < C < 1$, et quelque soit $C_1 \in \mathbb{R}$, la solution

$$y(x) = \sqrt{\frac{1-C}{C}} \cosh \left(\pm \sqrt{C} x + C_1 \right),$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

Comme discuté au cours, C_1 représente l'invariance par translation des solutions qui est due au fait que l'équation de départ est autonome.

Exercice 3. (Equations indépendantes de y)

On pose $y'(x) = u(x)$ avec u la nouvelle fonction inconnue pour laquelle on a l'équation du premier ordre

$$u' - \frac{x}{1+x^2} (u^2 + 1) = 0.$$

Par séparation des variables on obtient

$$\arctan(u) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$ et donc

$$u(x) = \tan\left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C\right)$$

sur tout intervalle ouvert $I \subset D$, où

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \pm \sqrt{e^{-2C} e^{(2n+1)\pi} - 1}, n \in \mathbb{Z}, n \geq \frac{C}{\pi} - \frac{1}{2} \right\}.$$

La solution générale est l'union des ensembles des primitives de u sur chacun des intervalles ouverts maximaux de D .

Exercice 4. (Équations indépendantes de x et y)*i)* Solution paramétrique

On pose $y' = u$ et on obtient l'équation $u' - u^2 - 1 = 0$ et donc par séparation des variables

$$\begin{aligned} x &= \arctan(u) + C_1 \\ y &= \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C_2 \end{aligned}$$

avec $u \in \mathbb{R}$ utilisé comme paramètre.

ii) Comme équation indépendante de x

On pose $y'(x) = u(y(x))$, avec $u(t)$ la nouvelle fonction inconnue. On obtient l'équation

$$u'u - u^2 - 1 = 0,$$

et par séparation des variables, $\forall C \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2} \ln(1+u(t)^2) = t + C, \quad t \in]-C, +\infty[,$$

et en isolant $u(t)$, $\forall C \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = \pm \sqrt{e^{2t+2C} - 1}, \quad t \in]-C, +\infty[.$$

Finalement on doit résoudre les équations

$$y'(x) = u(y(x)) = \pm \sqrt{e^{2y+2C} - 1},$$

et par séparation des variables on trouve, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

$$\arctan\left(\sqrt{e^{2y(x)+2C_1} - 1}\right) = \pm x + C_2$$

et en isolant $y(x)$ de l'équation $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (le \pm disparaît avec le carré),

$$y(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + (\tan(x + C_2))^2) + C_1,$$

avec $x \in]-\frac{\pi}{2} + n\pi - C_2, \frac{\pi}{2} + n\pi - C_2[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ arbitraire.

iii) Comme équation indépendante de y

On pose $y'(x) = u(x)$ et on obtient l'équation

$$u' - u^2 - 1 = 0$$

et donc par séparation des variables $\forall C_1 \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(u(x)) = x + C_1$$

et donc $\forall C_1 \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \tan(x + C_1)$$

et donc l'équation

$$y'(x) = \tan(x + C_1),$$

et par intégration, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = -\ln(|\cos(x + C_1)|) + C_2,$$

avec $x \in]-\frac{\pi}{2} + n\pi - C_1, \frac{\pi}{2} + n\pi - C_1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ arbitraire.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 6A

Échauffement.

- i) Comme $f(x, y) = c \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x^2 - c)$, les lignes de niveau de f sont de la forme $y = \frac{1}{2}(x^2 - c)$. Les lignes pour $c = -2, 0, 2$ sont tracées à la Fig. 1 (dans cet ordre de haut en bas). De plus on a

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T (x, y) = (2x, -2)^T$$

et ainsi

$$\nabla f(-2, 3) = (-4, -2)^T \quad \nabla f\left(1, \frac{1}{2}\right) = (2, -2)^T \quad \nabla f(2, 1) = (4, -2)^T.$$

Les gradients en ces points sont orthogonaux aux lignes de niveau correspondantes (voir Fig. 1). Pour information, la Fig. 2 représente le graphe de f avec des lignes de niveau $f(x, y) = \text{const}$ ainsi que les éléments de la Fig. 1 en 3D.

- ii) Les surfaces de niveau de g sont définies par $g(x, y, z) = c$ pour un $c \in \mathbb{R}$ fixé. Comme le graphe de f est $\mathcal{G}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$, on peut définir $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z = x^2 - 2y - z.$$

Ainsi $\mathcal{G}(f)$ correspond à la surface de niveau avec $g(x, y, z) = 0$. Pour $c \in \mathbb{R}$ général, on a $g(x, y, z) = c \Leftrightarrow z = f(x, y) - c$ si bien que la surface de niveau est le graphe de la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - c$. La Fig. 3 montre ces surfaces pour $c = -8, 0, 8$.

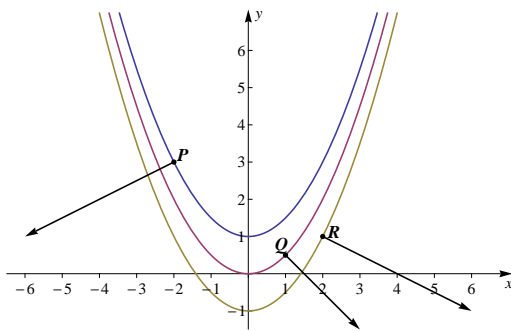


Fig. 1

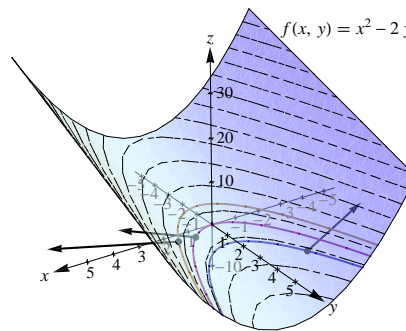


Fig. 2

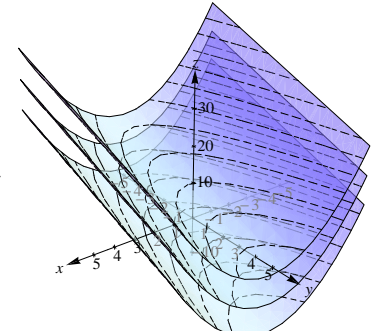


Fig. 3

Exercice 1.

- i) On a $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$, c.-à-d. le plan \mathbb{R}^2 sans les deux axes x et y . Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}.$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2y}{x^3} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{2x}{y^3}.\end{aligned}$$

ii) Comme les puissances avec exposant réel sont seulement définies pour des bases positives, on doit avoir $x > 0$ et $y > 0$. Pour z il n'y a pas de restriction si bien que $D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$. Pour les dérivées partielles on obtient directement $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^z x^{(y^z)-1}$.

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$, il faut récrire f de manière adéquate. Pour dériver par rapport à y on écrit

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= \exp(y^z \ln(x)) \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \exp(y^z \ln(x)) \cdot z y^{z-1} \ln(x) = x^{(y^z)} z y^{z-1} \ln(x),\end{aligned}$$

et pour dériver par rapport à z , on écrit

$$f(x, y, z) = \exp(\exp(z \ln(y)) \cdot \ln(x))$$

pour obtenir

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \exp(\exp(z \ln(y)) \ln(x)) \cdot \ln(y) \exp(z \ln(y)) \ln(x) = x^{(y^z)} y^z \ln(x) \ln(y).$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{x^{y^z-1} (y^z - 1) y^z}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = \frac{x^{y^z} (y^z)^2 z^2 (\ln(x))^2}{y^2} + \frac{x^{y^z} y^z z^2 \ln(x)}{y^2} - \frac{x^{y^z} y^z z \ln(x)}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = x^{y^z} (y^z)^2 (\ln(y))^2 (\ln(x))^2 + x^{y^z} y^z (\ln(y))^2 \ln(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{x^{y^z-1} (y^z)^2 z \ln(x)}{y} + \frac{x^{y^z-1} y^z z}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{x^{y^z} y^z y^{z-1} z \ln(x)}{x} + \frac{x^{y^z} y^{z-1} z}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = \frac{x^{y^z} (y^z)^2 \ln(y) \ln(x)}{x} + \frac{x^{y^z} y^z \ln(y)}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{x^{y^z} (y^z)^2 \ln(y) (\ln(x))^2 z}{y} + \frac{x^{y^z} y^z \ln(y) z \ln(x)}{y} + \frac{x^{y^z} y^z \ln(x)}{y}$$

iii) On a $D(f) = \mathbb{R}^2$. Pour les dérivées partielles on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy \cos(x^2y) \cosh(y-x) - \sin(x^2y) \sinh(y-x) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 \cos(x^2y) \cosh(y-x) + \sin(x^2y) \sinh(y-x)\end{aligned}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 2y \cos(x^2y) \cosh(-y+x) - 4x^2y^2 \sin(x^2y) \cosh(-y+x) \\ &\quad + 4xy \cos(x^2y) \sinh(-y+x) + \sin(x^2y) \cosh(-y+x)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x^4 \sin(x^2y) \cosh(-y+x) - 2x^2 \cos(x^2y) \sinh(-y+x) + \sin(x^2y) \cosh(-y+x)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x \cos(x^2y) \cosh(-y+x) - 2x^3y \sin(x^2y) \cosh(-y+x) \\ &\quad - 2xy \cos(x^2y) \sinh(-y+x) + x^2 \cos(x^2y) \sinh(-y+x) \\ &\quad - \sin(x^2y) \cosh(-y+x)\end{aligned}$$

iv) Le domaine est $D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 2\}$, c'est-à-dire \mathbb{R}^3 sans le plan $z = 2$. Les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{2}{z-2} \sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right) \cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{6z}{z-2} \sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right) \cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 2 \left(\frac{3y}{z-2} - \frac{x+3yz}{(z-2)^2} \right) \sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right) \cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right)\end{aligned}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= 2 \frac{1}{(z-2)^2} \left(\cosh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right) \right)^2 + 2 \frac{1}{(z-2)^2} \left(\sinh\left(\frac{x+3yz}{z-2}\right) \right)^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) &= 18 \frac{z^2}{(z-2)^2} \left(\cosh\left(\frac{3yz+x}{z-2}\right) \right)^2 + 18 \frac{z^2}{(z-2)^2} \left(\sinh\left(\frac{3yz+x}{z-2}\right) \right)^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) &= 2 \left(3 \frac{y}{z-2} - \frac{3yz+x}{(z-2)^2} \right)^2 \left(\cosh\left(\frac{3yz+x}{z-2}\right) \right)^2 \\ &\quad + 2 \sinh\left(\frac{3yz+x}{z-2}\right) \left(-6 \frac{y}{(z-2)^2} + 2 \frac{3yz+x}{(z-2)^3} \right) \cosh\left(\frac{3yz+x}{z-2}\right)\end{aligned}$$

$$+ 2 \left(\sinh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \right)^2 \left(3 \frac{y}{z - 2} - \frac{3yz + x}{(z - 2)^2} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = 6 \frac{z}{(z - 2)^2} \left(\cosh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \right)^2 + 6 \frac{z}{(z - 2)^2} \left(\sinh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = 2 \frac{1}{z - 2} \left(3 \frac{y}{z - 2} - \frac{3yz + x}{(z - 2)^2} \right) \left(\cosh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \right)^2 \\ &\quad - 2 \frac{1}{(z - 2)^2} \sinh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \cosh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \\ &\quad + 2 \frac{1}{z - 2} \left(\sinh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \right)^2 \left(3 \frac{y}{z - 2} - \frac{3yz + x}{(z - 2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) &= 6 \frac{z}{z - 2} \left(3 \frac{y}{z - 2} - \frac{3yz + x}{(z - 2)^2} \right) \left(\cosh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \right)^2 \\ &\quad + 6 \frac{1}{z - 2} \sinh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \cosh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \\ &\quad - 6 \frac{z}{(z - 2)^2} \sinh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \cosh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \\ &\quad + 6 \frac{z}{z - 2} \left(\sinh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \right)^2 \left(3 \frac{y}{z - 2} - \frac{3yz + x}{(z - 2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= 6 \frac{z}{z - 2} \left(3 \frac{y}{z - 2} - \frac{3yz + x}{(z - 2)^2} \right) \left(\cosh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \right)^2 \\ &\quad + 2 \sinh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \left(3 (z - 2)^{-1} - 3 \frac{z}{(z - 2)^2} \right) \cosh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \\ &\quad + 6 \frac{z}{z - 2} \left(\sinh \left(\frac{3yz + x}{z - 2} \right) \right)^2 \left(3 \frac{y}{z - 2} - \frac{3yz + x}{(z - 2)^2} \right) \end{aligned}$$

Exercice 2.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = xy \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} + x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Pour $(x, y) = (0, 0)$, on utilise la définition de la dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Pour calculer les deuxièmes dérivées partielles mixtes en $(0,0)$, on doit encore une fois utiliser cette définition. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-h) - 0}{h} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = +1.$$

On constate que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Remarque: Dans un cas comme ici où les dérivées partielles mixtes ne sont pas égales, il faut faire attention à la notation qui n'est malheureusement pas vraiment standardisée. Lorsqu'on a d'abord dérivé par rapport à x et ensuite par rapport à y , on écrit dans ce cours $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Dans la littérature et en particulier aussi dans le livre *Calcul différentiel et intégral* de Jacques Douchet et Bruno Zwahlen, on voit aussi l'inverse (i.e. x et y échangé). Vive donc les fonctions suffisamment régulières où ce problème ne se pose pas...

Exercice 3.

Q1 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y \ln(1 + (x^2 + y^2)^2)}{\exp(\sqrt{x^2 + y^2}) (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$. Alors

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{1}{4}$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas

On calcule les limites selon les axes x et y . On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \ln(1 + (x^2)^2)}{\exp(\sqrt{x^2}) (x^2)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

et

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y \ln(1 + (y^2)^2)}{\exp(\sqrt{y^2}) (y^2)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\exp(\sqrt{y^2})} \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + y^4)}{y^4}.$$

La première limite se calcule directement :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\exp(\sqrt{y^2})} = \frac{1}{\exp(0)} = 1.$$

La deuxième limite est de la forme $\frac{0}{0}$ et on peut utiliser Bernoulli-l'Hospital :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+y^4)}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{4y^3}{4y^3} = 1.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) \neq \lim_{y \rightarrow 0^+} f(0, y)$ la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

Remarque 1: Ci dessus on a pris une suite $y \rightarrow 0$ avec $y > 0$. Si on prenait $y \rightarrow 0$ avec $y < 0$ on aurait obtenu $\lim_{y \rightarrow 0^-} f(0, y) = -1$, du au fait que dans ce cas $\frac{y}{(y^2)^{5/2}} = \frac{\text{sign}(y)}{|y|^4} = \frac{-1}{y^4}$.

Remarque 2: Ceci est une manière de trouver la réponse, mais d'autres méthodes sont aussi possibles. Par exemple, si on prend une suite (x_n, y_n) avec $x_n = 0$ et $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, alors $f(x_n, y_n)$ s'approche de 1 pour n pair et de -1 pour n impair. Donc la limite n'existe pas.

Q2 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x + x^2 e^{\sin(y)}.$$

Alors la matrice Hessienne de f en (x, y) est

$$\square \quad e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} x^2(\cos(y)^2 - \sin(y)) & 2x \cos(y) \\ 2x \cos(y) & 2 \end{pmatrix} \qquad \square \quad e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x \cos(y) \\ 2x \cos(y) & -x^2 \sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \quad e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x \cos(y) \\ 2x \cos(y) & x^2(\cos(y)^2 - \sin(y)) \end{pmatrix} \qquad \square \quad e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x \cos(y) \\ 2x \cos(y) & x^2 \cos(y)^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

i) Toutes les fonctions algébriques de deux variables (de n variables) sont différentiables sur leur domaine de définition. Dans notre cas, le seul point problématique éventuel est donc $(0, 0)$. La continuité en $(0, 0)$ se montre en passant en coordonnées polaires. On a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{r^3 \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)}{r^2} \right| \leq r,$$

et donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y) - f(0, 0)| \leq \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$.

ii) Puisque f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En $(0, 0)$ on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

iii) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2},$$

et sur une suite de la forme $(x_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, x_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Exercice 5.

i) La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (la composition de fonctions continues donne des fonctions continues). En $(x, y) = (0, 0)$ on a en coordonnées polaires $|f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))| \leq r^2 \ln(r)$ et donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

ii) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

et les dérivées partielles en $(x, y) = (0, 0)$ sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0 \cdot \ln(h^2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h \cdot \ln(h^2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

iii) Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant que compositions de fonctions continues. Pour étudier leur continuité en $(0, 0)$, on utilise les coordonnées polaires dans (1). On trouve

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| &= \left| r \sin(\theta) \ln(r^2) + 2 \frac{r^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)}{r^2} \right| \leq 2|r \ln(r)| + 2r \\ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| &= \left| r \cos(\theta) \ln(r^2) + 2 \frac{r^3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2}{r^2} \right| \leq 2|r \ln(r)| + 2r \end{aligned}$$

On calcule la limite du premier terme dans ces expressions avec Bernoulli-Hôpital :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r \ln(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln(r)}{\frac{1}{r}} \stackrel{BH}{=} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} = - \lim_{r \rightarrow 0^+} r = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0),$$

c'est-à-dire les dérivées partielles de f sont continues sur \mathbb{R}^2 .

iv) Les dérivées partielles secondes pour $(x, y) \neq (0, 0)$ sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 + \ln(x^2 + y^2) - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Au point $(0, 0)$, les deux dérivées secondes "pures" sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0 + h, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \ln(h^2) + 2 \cdot 0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0 + h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \ln(h^2) + 2 \cdot 0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

mais la dérivée seconde mixte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \ln(h^2) + 0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(h^2) = -\infty$$

n'existe pas en $(0, 0)$. De plus, les dérivées secondes ne sont pas continues en $(0, 0)$ car leurs limites n'existent pas :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{0}{t^2} - \frac{0}{t^4} \right) = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, t) = \frac{6t^2}{2t^2} - \frac{4t^4}{4t^4} = 2,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{0}{t^2} - \frac{0}{t^4} \right) = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, t) = \frac{6t^2}{2t^2} - \frac{4t^4}{4t^4} = 2.$$

Analyse avancée II – Corrigé de la série 6B

Échauffement. (Produits scalaires et normes induites)

- i)* Par la positivité du produit scalaire on a $\forall u \in V, \|u\| \geq 0$, et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
- ii)* Par la bi-linéarité du produit scalaire on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = \langle \lambda u, \lambda u \rangle^{1/2} = \sqrt{\lambda^2} \langle u, u \rangle^{1/2} = |\lambda| \|u\|$.
- iii)* Par la symétrie du produit scalaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir Exercice 1) on a $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$ et donc $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Exercice 1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$,

$$0 \leq \langle \alpha u + v, \alpha u + v \rangle = \alpha^2 \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\alpha \langle u, v \rangle \equiv p(\alpha)$$

De $p(\alpha) \geq 0$ on déduit avec $\|u\|^2 \geq 0$ que le discriminant de l'équation quadratique $p(\alpha) = 0$ doit être négatif ou zéro :

$$\langle u, v \rangle^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0,$$

car sinon on a deux solutions réelles avec des valeurs négatives de $p(\alpha)$ entre ces deux racines. On a donc bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2. (Espaces métriques)

Soient $(u, v, w) \in V^3$.

- i)* (symétrie) $d(u, v) = d(v, u)$ car $\|u - v\| = \|v - u\|$.
- ii)* (séparation) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow \|u - v\| = 0 \Leftrightarrow u = v$.
- iii)* (inégalité triangulaire) Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+x}$. La fonction f est croissante, car

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0,$$

et donc, puisque $\|u - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\|$,

$$f(\|u - v\|) \leq f(\|u - w\| + \|w - v\|).$$

De plus on a, pour $x, y \geq 0$,

$$f(x + y) = \frac{x + y}{1 + x + y} = \frac{x}{1 + x + y} + \frac{y}{1 + x + y} \leq \frac{x}{1 + x} + \frac{y}{1 + y} = f(x) + f(y),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} d(u, v) = f(\|u - v\|) &\leq f(\|u - w\| + \|w - v\|) \\ &\leq f(\|u - w\|) + f(\|w - v\|) = d(u, w) + d(w, v). \end{aligned}$$

Les points *i)* - *iii)* montrent que d est une distance sur V .

Remarque : on peut aussi montrer le point iii) en observant que $f(0) = 0$ et que f est une fonction concave, c'est-à-dire que pour tout $0 \leq a \leq b$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \geq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

En choisissant $a = 0$ on obtient que pour tout $b \geq 0$ et $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda f(b) \leq f(\lambda b)$, et par conséquence que pour tout $x, y \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y} f(x+y) &\leq f(x) \\ \frac{y}{x+y} f(x+y) &\leq f(y) \end{aligned}$$

et donc en sommant les deux inégalités que $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 3. (Sous-ensembles de \mathbb{R}^n)

Nous basons ici les arguments sur le concept des ensembles ouverts.

- i) $\overset{\circ}{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. En effet, le point $(0, 0)$ est par définition un point isolé de X , et donc $(0, 0) \notin \overset{\circ}{X}$. De plus, l'ensemble $\overset{\circ}{X}$ indiqué est un ensemble ouvert, car si $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{X}$, alors la boule ouverte $B \equiv B((x_0, y_0), \delta)$, où $\delta = \|(x_0, y_0)\| - 1$, satisfait $B \subset \overset{\circ}{X}$, car, pour $(x, y) \in B$ on a :

$$\|(x, y)\| \geq \|(x_0, y_0)\| - \|(x - x_0, y - y_0)\| > \|(x_0, y_0)\| - \delta = 1.$$

L'ensemble $\overset{\circ}{X}$ indiqué est donc bien le plus grand sous-ensemble ouvert de X .

- ii) $\overline{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}$. En effet, le complémentaire de X est l'ensemble $X^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ et avec les mêmes arguments que sous i) on se convainc que l'intérieur de X^c est l'ensemble $\overset{\circ}{X^c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$. Finalement on utilise que $\overline{X} = (\overset{\circ}{X^c})^c$.

- iii) $\partial X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$, car $\partial X = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$.

- iv) L'ensemble des points isolés est $\{(0, 0)\}$ (lire la définition correspondante du cours).

- v) L'ensemble des points d'accumulation est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} = \overline{X} \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 4. (Sous-ensembles de \mathbb{R}^n)

- i) L'ensemble $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\}$ est une couronne (sans les bords) centrée à l'origine, et cet ensemble est ouvert : soit $x \in \Omega_1$ et

$$\delta = \min\{\|x\| - 1, 4 - \|x\|\},$$

alors $B \equiv B(x, \delta) \subset \Omega_1$. Ceci se montre de la manière suivante. Soit $y \in B$, alors par définition de δ on a à la fois $\|x - y\| < \|x\| - 1$ et $\|x - y\| < 4 - \|x\|$. On a donc à la fois

$$\|y\| \leq \|x\| + \|x - y\| < \|x\| + (4 - \|x\|) = 4$$

et

$$\|y\| \geq \|x\| - \|x - y\| > \|x\| - (\|x\| - 1) = 1.$$

On a donc bien que $y \in \Omega_1$.

D'autre part, Ω_1 est borné, car $\forall x \in \Omega_1$, $\|x\| < 4$ et donc $\Omega_1 \subset \overline{B(0, 4)}$. Le bord de Ω_1 est donné par

$$\partial\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 16\}.$$

En effet si $x \in \partial\Omega_1$ on vérifie aisément que quelque soit $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ et que $B(x, \delta) \cap \Omega_1^c \neq \emptyset$.

ii) Soit $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 - x_2^2 = 1\}$. Cet ensemble consiste de deux branches d'hyperbole. Il s'agit d'un ensemble fermé, car on a que $\Omega_2^c = \{(x_1, x_2) : x_1^2 - x_2^2 \neq 1\}$ qui est un ensemble ouvert. Pour s'en convaincre on considère un point $z \in \Omega_2^c$ et on montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(z, \delta) \subset \Omega_2^c$. Pour ce faire, supposons qu'il existe $\zeta > 0$ (la démarche est analogue si on suppose $\zeta < 0$) tel que

$$z_1^2 - z_2^2 - 1 = \zeta.$$

et choisissons

$$\delta = \min \left\{ \frac{\zeta}{8(|z_1| + |z_2|)}, \sqrt{\frac{\zeta}{4}} \right\}$$

alors tout point $(w_1, w_2) \in B(z, \delta)$ s'écrit

$$w_1 = z_1 + \delta_1 \quad \text{et} \quad w_2 = z_2 + \delta_2, \quad \text{avec} \quad \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} < \delta,$$

et vérifie

$$\begin{aligned} w_1^2 - w_2^2 - 1 &= z_1^2 - z_2^2 - 1 + 2\delta_1 z_1 - 2\delta_2 z_2 + \delta_1^2 - \delta_2^2 \\ &> \zeta - (2\delta(|z_1| + |z_2|) + \delta^2) \geq \frac{\zeta}{2} > 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $B(z, \delta) \subset \Omega_2^c$ (faire une dessin!). On vérifie aussi sans difficulté que le bord de Ω_2 est Ω_2 lui-même et que Ω_2 est un ensemble non borné.

Remarques :

- (a) L'équation $z_1^2 - z_2^2 - 1 = \zeta > 0$ exprime le fait que le point (z_1, z_2) se trouve sur une hyperbole à droite de l'hyperbole $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.
- (b) L'inéquation $w_1^2 - w_2^2 - 1 \geq \frac{\zeta}{2} > 0$ exprime le fait que le point (w_1, w_2) se trouve à droite d'une hyperbole qui se trouve aussi à droite de l'hyperbole $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.
- (c) Pour comprendre le choix de δ il suffit de suivre le calcul concernant le point (w_1, w_2) . Pour obtenir l'inégalité

$$\zeta - (2\delta(|z_1| + |z_2|) + \delta^2) \geq \frac{\zeta}{2}$$

on demande que à la fois $2\delta(|z_1| + |z_2|) \leq \frac{\zeta}{4}$ ainsi que $\delta^2 \leq \frac{\zeta}{4}$, ce qui est justement le cas avec le δ qui a été choisi.

iii) Soit $\Omega_3 = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, \sin(\frac{1}{x_1}) < x_2 < 2\}$. Il s'agit d'un ensemble ouvert : soit $x = (x_1, x_2) \in \Omega_3$. Cherchons $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ de sorte que $]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[\times]x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2[\subset \Omega_3$. Posons $\delta_2 = \frac{1}{2}(x_2 - \sin(\frac{1}{x_1})) > 0$. Par continuité de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ sur $]0, 1[$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $0 < y_1 < 1$ et $|y_1 - x_1| < \delta_1$ impliquent

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) - \sin\left(\frac{1}{y_1}\right) \right| < \delta_2.$$

Finalement, si $(y_1, y_2) \in]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[\times]x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2[$, alors

$$\sin\left(\frac{1}{y_1}\right) < \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + \delta_2 = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + x_2\right) = x_2 - \delta_2 < y_2.$$

Il suffit maintenant de réduire δ_1 de sorte que $]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[\subset]0, 1[$ et δ_2 de sorte que $x_2 + \delta_2 < 2$. Cela montre que $B(x, \min(\delta_1, \delta_2)) \subset \Omega_3$ (il est vivement conseillé d'agrémenter cet argument d'un dessin).

L'ensemble Ω_3 est borné car $\forall x \in \Omega_3, \|x\| \leq \sqrt{5}$. Finalement, le bord de Ω_3 est donné par

$$\begin{aligned} & \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 \leq 1, x_2 = \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 2\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 2\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, \sin(1) \leq x_2 \leq 2\}. \end{aligned}$$

Montrons seulement que $\{(x_1, x_2) : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 2\} \subset \partial\Omega$ où $\partial\Omega$ est le bord de Ω . En effet si $x_1 = 0$ et $-1 \leq x_2 \leq 2$ et si $0 < \delta < 1$, il existe $0 < \varepsilon < \delta$ tel que $\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -1$.

Ainsi $B\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\delta\right) \cap \Omega_3 \neq \emptyset$. D'autre part $B\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\delta\right) \cap \Omega_3^c \neq \emptyset$.

iv) $\Omega_4 = \{(x_1, x_2) : (x_1 \in \mathbb{Q}, 0 < x_1 < 1, 1 < x_2 < 5) \vee (x_1 \notin \mathbb{Q}, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 5)\}$. Ω_4 n'est ni ouvert, ni fermé. En effet,

(a) Soit $x_1 \in]0, 1[$, $x_1 \notin \mathbb{Q}$, et $x_2 \in]0, 1[$. Si $x = (x_1, x_2)$ on a $x \in \Omega_4$ et quelque soit $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap \Omega_4^c \neq \emptyset$. Ainsi $x \in \partial\Omega_4$, ce qui montre que Ω_4 n'est pas ouvert.

(b) Soit maintenant $x_1 \in]0, 1[$, $x_1 \in \mathbb{Q}$, et $x_2 \in]0, 1[$. Alors $x \notin \Omega_4$ et quelque soit $\delta > 0$ on a $B(x, \delta) \cap \Omega_4 \neq \emptyset$, ce qui prouve que Ω_4^c n'est pas ouvert et par conséquent Ω_4 n'est pas fermé.

De plus Ω_4 est borné car si $x \in \Omega_4, \|x\| \leq 5\sqrt{2}$. Le bord de Ω_4 est donné par

$$\begin{aligned} \partial\Omega_4 = & \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, 1 \leq x_2 \leq 5\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, 1 \leq x_2 \leq 5\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : x_2 = 5, 0 \leq x_1 \leq 1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

En effet, pour tout point $x \in [0, 1] \times [0, 1]$ et pour tout $\delta > 0$, le disque $B(x, \delta)$ contient des points de Ω_4 et des points de Ω_4^c . Les trois autres contributions sont triviales.

v) $\Omega_5 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{(x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}$. Ω_5 est la réunion d'une disque ouvert C_1 , centré en $(0, 0)$ de rayon 1, et d'un disque fermé C_2 , centré en $(1, 1)$ de rayon 1. Il s'agit d'un ensemble ni ouvert ni fermé : le point $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est sur le bord de Ω_5 mais n'appartient pas à Ω_5 et le point $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ n'est pas un

point dans $\mathring{\Omega}_5$. Ω_5 est borné, car contenu dans la boule centrée au point $(0,0)$ et de rayon 25. Le bord de Ω_5 est donné par

$$\begin{aligned}\partial\Omega_5 = & \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1x_2 \leq 0\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1, x_1 \geq 1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1, x_2 \geq 1\}.\end{aligned}$$

Analyse avancée II – Corrigé de la série 7A

Échauffement.

Soit $f(x, y) = x^3y + x^2 + y^2$. L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) , où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est (voir le cours)

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + 2y$, l'équation s'écrit pour $(x_0, y_0) = (1, 1)$:

$$z = 3 + 5(x - 1) + 3(y - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 3y - z = 5 .$$

Exercice 1.

La dérivée f' d'une fonction f dérivable de deux variables au point (x_0, y_0) est donnée par

$$f'(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) .$$

Pour simplifier l'écriture, on va omettre le (x_0, y_0) dans la suite. On a donc

$$\begin{aligned} i) \quad f' &= \left(\frac{\partial(g+h)}{\partial x}, \frac{\partial(g+h)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = g' + h' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad f' &= \left(\frac{\partial(gh)}{\partial x}, \frac{\partial(gh)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} h + g \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} h + g \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= h \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) + g \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = h g' + g h' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii) \quad f' &= \left(\frac{\partial(g/h)}{\partial x}, \frac{\partial(g/h)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x} h - g \frac{\partial h}{\partial x}}{h^2}, \frac{\frac{\partial g}{\partial y} h - g \frac{\partial h}{\partial y}}{h^2} \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{g}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{1}{h} g' - \frac{g}{h^2} h' \end{aligned}$$

Exercice 2.

- i) Toutes les fonctions algébriques de deux variables (de n variables) sont différentiables sur leur domaine de définition. Dans notre cas, le seul point problématique éventuel est donc $(0, 0)$. La continuité en $(0, 0)$ se montre en passant en coordonnées polaires. On a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{r^3 \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)}{r^2} \right| \leq r,$$

et donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y) - f(0, 0)| \leq \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$.

- ii) Puisque f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En $(0, 0)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

- iii) Comme vu en i), la restriction de f à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est une fonction différentiable.

- iv) Supposons que f soit différentiable en $(0, 0)$. Par définition de la différentiabilité (voir cours), on a alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0 + x, 0 + y) = f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \epsilon(x, y) \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \\ &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) y + \epsilon(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

avec $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \epsilon(x, y) = 0$. Puisque $f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ on a que

$$\epsilon(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mais sur une suite de la forme $(x_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3}{2\sqrt{2}x_n^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est différentiable en $(0, 0)$.

- v) Par i), les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne peuvent pas être continues en $(0, 0)$ car sinon la fonction f serait différentiable en $(0, 0)$, ce qui n'est pas le cas (cf. iv). En effet, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

et sur une suite de la forme $(x_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, x_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Exercice 3. (QCM, différentiabilité)

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors :

- f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.
- les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.
- f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
- f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, 0)$.

Exercice 4. (V/F : différentiabilité)

Q1: Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0, y_0) , alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existent.

Réponse : vrai. Voir une proposition du cours.

Q2: Si une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) .$$

Réponse : faux.

Pour une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 on a pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

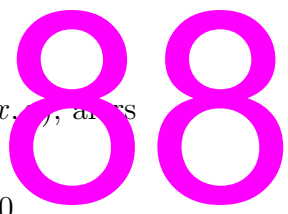
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

mais il n'existe en général aucun lien entre les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Q3: Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si f est différentiable en (x_0, y_0) , alors

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 .$$

Réponse : vrai. Découle de la définition de différentiable vue au cours.



Q4: Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si f est différentiable en (x, y) , alors

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Réponse : vrai.

Oui, ça découle de la définition de différentiable.

Q5: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^2, y_0) - f(x_0, y_0)}{h^2}.$$

Réponse : faux.

Non, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h}.$$

Exercice 5.

Q1 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y}{x} + (1 - \cos(y)) \sin(x)^2$$

et soit le point $p = (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Le plan tangent au graphe de f en $(p, f(p))$ est donné par l'équation

$z = -\frac{4}{\pi}x + \frac{2}{\pi}y$

$z = \frac{2}{\pi}y - \frac{4}{\pi}x + 4$

$z = \frac{2}{\pi}y + \frac{4}{\pi}x + 4$

$z = -\frac{4}{\pi}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{2}{\pi}(y - \pi)$

L'équation du plan tangent au graphe de f au point $p = (p_1, p_2)$ est

$$z = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot (x - p_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot (y - p_2).$$

En l'occurrence on a

$$f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = 2 + (1 - \cos(\pi)) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 4$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \left[-\frac{y}{x^2} + (1 - \cos(y)) \cdot 2 \sin(x) \cos(x)\right]_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)} = -\frac{4}{\pi},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \left[\frac{1}{x} + \sin(y) \sin(x)^2\right]_{(x,y)=\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)} = \frac{2}{\pi}.$$

Ainsi l'équation du plan tangent est

$$z = 4 - \frac{4}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} (y - \pi) = 4 - \frac{4}{\pi}x + \frac{2}{\pi}y.$$

Exercice 6.**Solution 1:** Une possible fonction est :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

dont les dérivées partielles en $(0, 0)$ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{x^4} - 0}{x} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{-y^5}{y^4} - 0}{y} = -1. \end{aligned}$$

Pour étudier la différentiabilité supposons que f soit différentiable en $(0, 0)$. Par définition de la différentiabilité (voir cours), on a alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0 + x, 0 + y) = f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \epsilon(x, y) \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \\ &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) y + \epsilon(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

avec $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \epsilon(x, y) = 0$. Puisque $f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$ on a que

$$\epsilon(x, y) = \frac{f(x, y) - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^4 y - x y^4}{(x^4 + y^4) \sqrt{x^2 + y^2}},$$

mais sur une suite de la forme $(x, 2x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}]{x \rightarrow 0} (0, 0)$ on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \epsilon(x, 2x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-14x^5}{17\sqrt{5}x^5} = -\frac{14}{17\sqrt{5}} \neq 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est différentiable en $(0, 0)$.**Solution 2:** On va construire la fonction f . Posons

$$f(x, y) = x - y + \sqrt{x^2 + y^2} \epsilon(x, y)$$

avec $\epsilon(x, y)$ à déterminer et tel que $\epsilon(0, 0) = 0$ (voir définition de différentiable). Ainsi on peut évaluer f en $(0, 0)$ et on obtient $f(0, 0) = 0$. On veut que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$, donc il faut que

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + |h| \epsilon(h, 0)}{h} = 1 + \lim_{h \rightarrow 0} \text{sign}(h) \epsilon(h, 0),$$

qui est vrai si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h, 0) = 0$. De manière similaire, on a que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$ si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(0, h) = 0$. Mais on veut que f ne soit pas différentiable, donc il faut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \epsilon(x, y)$ n'existe pas. Prenons par exemple

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } y = x^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ce choix de $\epsilon(x, y)$ on a que f satisfait les hypothèses de l'exercice car $\epsilon(0, 0) = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(0, h) = 0$, ce qui implique $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$. De plus f n'est pas différentiable car

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h, 0) \neq \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h, h^2) = 1,$$

et donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \epsilon(x, y)$ n'existe pas.

Remarque: On voit que si $\epsilon(x, y)$ tend vers 0 selon la direction des axes x et y alors les dérivées partielles de f en x et y existent. Mais ceci n'est pas suffisant pour que f soit différentiable, pour ceci il faut que $\epsilon(x_n, y_n)$ converge vers 0 pour toutes les suites (x_n, y_n) telles que $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$.

Exercice 7.

Voir les notes du cours.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 7B

Échauffement. (Topologie de \mathbb{R}^n)

- i) Soit $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, avec U_{α} des sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}^n . Pour tout $x \in U$ il existe α tel que $x \in U_{\alpha}$. U_{α} étant ouvert il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset U_{\alpha} \subset U$. Donc U est ouvert.
- ii) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $U = \bigcap_i^m U_i$, avec U_i des sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}^n . Si $x \in U$ alors $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $x \in U_i$, et $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ il existe $\delta_i > 0$ telle que $B(x, \delta_i) \subset U_i$. Soit $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, alors $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $B(x, \delta) \subset B(x, \delta_i) \subset U_i$ et donc $B(x, \delta) \subset \bigcap_i^m U_i = U$.

Exercice 1. (Bolzano-Weierstrass)

Soit (x_k) , $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ une suite bornée, c'est-à-dire il existe $C > 0$ tel que $\forall k$, $\|x_k\| \leq C$. Alors, pour chaque $i = 1, \dots, n$ la suite $(x_{k,i})$ est bornée. On peut donc par le théorème de Bolzano Weierstrass pour \mathbb{R} extraire de la suite (x_k) une première sous-suite, telle que la première composante des (x_k) convergent. De cette première sous-suite on peut extraire une sous-suite de sorte que la deuxième composante des (x_k) converge aussi. En répétant cette procédure n fois on arrive à une sous-suite pour laquelle toutes les composantes de (x_k) convergent. A noter que le fait que l'on ait qu'un nombre finis de composantes est crucial!

Exercice 2. (Suites de Cauchy)

- i) Une suite (x_k) , $x_k \in \mathbb{R}^n$ est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \geq n_0, \|x_n - x_m\| \leq \epsilon.$$

- ii) Ceci est vrai pour $n = 1$ (voir Analyse I). Nous avons montré dans le cours qu'une suite (x_k) , $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si pour chaque $i = 1, \dots, n$ la suite $(x_{k,i})$ converge vers x_i . Ceci veut dire que toutes les suites des composantes de (x_k) sont des suites de Cauchy, ce qui implique la proposition en utilisant la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ et puis l'équivalence des normes dans \mathbb{R}^n .

Exercice 3. (Sous-ensembles fermés)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et (x_k) , $x_k \in X$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$. Le point x ne peut pas être dans le complément X^c de X , car X^c est ouvert mais tout voisinage de x contient des points $x_k \in X$. Donc $x \in X$. Réciproquement, supposons que tout suite convergente (x_k) , $x_k \in X$, converge vers un élément de X . Nous procédons par un raisonnement par l'absurde. Si X n'est pas fermé, alors X^c n'est pas ouvert, et il existe donc au moins un point $\bar{x} \in X^c$ tel que dans toute boule $B\left(\bar{x}, \frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_k \in X$. Par conséquence, la suite (x_k) de ces x_k converge vers \bar{x} , et donc par hypothèse $\bar{x} \in X$, ce qui contredit $\bar{x} \in X^c$. Donc X est fermé.

Exercice 4. (Espace vectoriel des fonctions continues)

Soit l'ensemble $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions avec les nombres réels.

- i) Si f_1 et f_2 sont deux fonctions dans V , alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la fonction $\alpha f_1 + \beta f_2$ est aussi dans V .
- ii) Par conséquence de la linéarité de l'intégral et des propriétés des fonctions continues on a bien que $\forall f, g, f_1, f_2 \in V$, $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, que $\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g \rangle = \alpha \langle f_1, g \rangle + \beta \langle f_2, g \rangle$ et que $\langle f, f \rangle \geq 0$, avec égalité seulement pour $f = 0$. Les propriétés de la norme induites suivent comme dans le cas de $V = \mathbb{R}^n$ (voir la série 6B, échauffement).
- iii) Comme pour le cas de \mathbb{R}^n on a pour $f, g \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \alpha f + g, \alpha f + g \rangle &= \int_0^1 (\alpha f(x) + g(x))^2 dx = \int_0^1 (\alpha^2 f(x)^2 + 2\alpha f(x)g(x) + g(x)^2) dx \\ &= \alpha^2 \int_0^1 f(x)^2 dx + 2\alpha \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 g(x)^2 dx \\ &= \alpha^2 \|f\|^2 + 2\alpha \langle f, g \rangle + \|g\|^2 \equiv p(\alpha), \end{aligned}$$

avec les mêmes conclusions pour le discriminant de l'équation quadratique $p(\alpha) = 0$. D'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- iv) Les propriétés de la norme suivent directement des propriétés du supremum et de l'inégalité triangulaire pour chaque $x \in [0, 1]$.
- v) $\forall x \in (0, 1]$, $1 - x < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Par contre on a que $\forall n$, $f_n(0) = 1$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1$. La limite point par point de la suite des fonctions f_n n'étant pas continue en $x = 0$, la limite n'est donc pas dans V . Néanmoins

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-x)^{2n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Ceci montre que la suite des fonctions $f_n \in V$ converge dans la norme $\|\cdot\|_2$ vers la fonction $f = 0 \in V$.

- vi) Le théorème de la convergence uniforme (voir le cours d'Analyse I) garantit que la limite d'une suite de fonctions continues qui converge uniformément est une fonction continue. La suite f_n donnée ne converge donc pas dans la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ceci signifie que les deux normes ne peuvent pas être équivalentes, car pour des normes équivalentes la convergence dans une des normes est équivalente à la convergence dans l'autre norme.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 8A

Échauffement.

i) On a que $f(t) = e^{\ln(\ln(t)) \cdot \sin(t)}$ et donc

$$\begin{aligned} f'(t) &= f(t) \cdot \left(\frac{1}{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} \cdot \sin(t) + \ln(\ln(t)) \cdot \cos(t) \right) \\ &= \ln(t)^{\sin(t)} \frac{1}{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} \cdot \sin(t) + \ln(t)^{\sin(t)} \ln(\ln(t)) \cdot \cos(t) \\ &= \ln(t)^{\sin(t)-1} \frac{1}{t} \cdot \sin(t) + \ln(t)^{\sin(t)} \ln(\ln(t)) \cdot \cos(t). \end{aligned}$$

ii) Voir le chapitre 5.2.4 du cours.

Exercice 1.

Les matrices jacobiniennes de F et G sont

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x F_1(x, y) & \partial_y F_1(x, y) \\ \partial_x F_2(x, y) & \partial_y F_2(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_G(s, t) = \begin{pmatrix} \partial_s G_1(s, t) & \partial_t G_1(s, t) \\ \partial_s G_2(s, t) & \partial_t G_2(s, t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$J_F(G(s, t)) = \begin{pmatrix} (\partial_x F_1)(G(s, t)) & (\partial_y F_1)(G(s, t)) \\ (\partial_x F_2)(G(s, t)) & (\partial_y F_2)(G(s, t)) \end{pmatrix},$$

Le produit des deux matrices est donc (les arguments sont omis pour des raisons d'espace)

$$J_F(G(s, t)) \cdot J_G(s, t) = \begin{pmatrix} \partial_x F_1 \partial_s G_1 + \partial_y F_1 \partial_s G_2 & \partial_x F_1 \partial_t G_1 + \partial_y F_1 \partial_t G_2 \\ \partial_x F_2 \partial_s G_1 + \partial_y F_2 \partial_s G_2 & \partial_x F_2 \partial_t G_1 + \partial_y F_2 \partial_t G_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

D'autre part la matrice jacobienne de \bar{F} est

$$J_{\bar{F}}(s, t) = \begin{pmatrix} \partial_s \bar{F}_1(s, t) & \partial_t \bar{F}_1(s, t) \\ \partial_s \bar{F}_2(s, t) & \partial_t \bar{F}_2(s, t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

En notation courte on a

$$\partial_s \bar{F}_i(s, t) = \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial s} = \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad i = 1, 2,$$

avec $x(s, t) \equiv G_1(s, t)$ et $y(s, t) \equiv G_2(s, t)$, ce qui s'écrit proprement comme

$$\partial_s \bar{F}_i(s, t) = \partial_s (F_i \circ G)(s, t) = (\partial_x F_i)(G(s, t)) \cdot (\partial_s G_1)(s, t) + (\partial_y F_i)(G(s, t)) \cdot (\partial_s G_2)(s, t).$$

Les membres de droite de (2) et (1) sont bien égaux, c'est-à-dire

$$J_{\bar{F}}(s, t) = J_F(G(s, t)) \cdot J_G(s, t).$$

Exercice 2.

Soit

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto g(x, y, z) \end{aligned}$$

une fonction quelconque de classe C^1 . On considère la fonction

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto h(u, v) = (ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u) \end{aligned}$$

et on définit $f = g \circ h$. Alors

$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1) + 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1)$

$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 1)$

$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1)$

$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1)$

La fonction f est définie par

$$f(u, v) = g(ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial g}{\partial x}(ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u) \cdot ve^{-2u} \cdot (-2) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u) \cdot 2ue^{-v} \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial z}(ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u) \cdot 1 \end{aligned}$$

et comme $\left[(ve^{-2u}, u^2e^{-v}, u) \right]_{(u,v)=(1,0)} = (0, 1, 1)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) &= \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1) \cdot 0 + \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1) \cdot 2 + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1) \cdot 1 \\ &= 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1, 1) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1). \end{aligned}$$

Exercice 3.

Soient $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1 . Soit $h = f \circ g$ et $p \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$J_h(p) = J_g(f(p)) \cdot J_f(p).$$

□ VRAI ■ FAUX

Non, pour $h = f \circ g$ on a

$$J_h(p) = J_f(g(p)) J_g(p).$$

Exercice 4.

- i) Le domaine de H est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Ainsi $u > 0$ parce que $x > 0$ et donc $\text{Im}(H) = \tilde{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$, c.-à-d. $\tilde{D} = D$. Pour trouver la transformation $G \equiv H^{-1}$ on résout les équations de u et v pour x et y . On a $y = v\sqrt{x}$, d'où

$$u = x^2 + 2v^2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2v^2 \pm \sqrt{4v^4 + 4u}}{2} = -v^2 \pm \sqrt{v^4 + u}.$$

Comme $x > 0$, il faut prendre la solution avec $+\sqrt{\quad}$ et donc

$$(x, y) = G(u, v) = \left(-v^2 + \sqrt{v^4 + u}, v\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}} \right).$$

Les dérivées partielles de G sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial u} &= \frac{1}{2\sqrt{v^4 + u}} \\ \frac{\partial G_1}{\partial v} &= -2v + \frac{4v^3}{2\sqrt{v^4 + u}} = \frac{-2v(-v^2 + \sqrt{v^4 + u})}{\sqrt{v^4 + u}} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u} &= \frac{v}{4\sqrt{v^4 + u}\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \\ \frac{\partial G_2}{\partial v} &= \sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}} + \frac{v}{2\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \left(-2v + \frac{4v^3}{2\sqrt{v^4 + u}} \right) \\ &= \sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}} + \frac{-v^2(-v^2 + \sqrt{v^4 + u})}{\sqrt{v^4 + u}\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \\ &= \frac{(-v^2 + \sqrt{v^4 + u})^2}{\sqrt{v^4 + u}\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \end{aligned}$$

La matrice jacobienne de G est alors

$$\begin{aligned} J_G(u, v) &= \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u, v) & \partial_v G_1(u, v) \\ \partial_u G_2(u, v) & \partial_v G_2(u, v) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{v^4 + u}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2v(-v^2 + \sqrt{v^4 + u}) \\ \frac{v}{4\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} & \frac{(-v^2 + \sqrt{v^4 + u})^2}{\sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + u}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour évaluer en $(u, v) = H(x, y)$, observons que

$$\sqrt{v^4 + u} = \sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^4 + x^2 + 2y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{x^2} + x^2 + 2y^2} = \sqrt{\frac{(y^2 + x^2)^2}{x^2}} = \frac{y^2 + x^2}{x}$$

et donc

$$J_G(H(x, y)) = \frac{x}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2y\sqrt{x} \\ \frac{y}{4x} & x^{3/2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

ii) La matrice jacobienne de H est

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ -\frac{y}{2x^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix},$$

d'où

$$(J_H(x, y))^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{x} + \frac{2y^2}{x^{3/2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} & -4y \\ \frac{y}{2x^{3/2}} & 2x \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x & -4yx^{3/2} \\ \frac{y}{2} & 2x^{5/2} \end{pmatrix},$$

ce qui est la même matrice qu'en (3).

Exercice 5.

i) La matrice jacobienne de H est

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x+2)^2} & \frac{1}{x+2} \\ \frac{1}{2y+1} & -\frac{2x}{(2y+1)^2} \end{pmatrix}.$$

ii) Pour trouver la transformation $G \equiv H^{-1}: \tilde{D} \rightarrow D$, on utilise

$$v = \frac{x}{2y+1} \Leftrightarrow x = v(2y+1) \quad (4)$$

qu'on met dans l'expression donnée pour u

$$\begin{aligned} u = \frac{y}{x+2} &\Rightarrow u = \frac{y}{v(2y+1)+2} \Rightarrow uv(2y+1) + 2u = y \\ &\Rightarrow uv + 2u = y(1 - 2uv) \Rightarrow y = \frac{u(v+2)}{1-2uv}. \end{aligned}$$

En remplaçant y dans l'équation de droite dans (4) par ce résultat, on trouve

$$x = \frac{2uv(v+2)}{1-2uv} + v = \frac{2uv(v+2) + v - 2uv^2}{1-2uv} = \frac{(4u+1)v}{1-2uv},$$

si bien que

$$G(u, v) = \left(\frac{(4u+1)v}{1-2uv}, \frac{u(v+2)}{1-2uv} \right) = \frac{1}{1-2uv} \left((4u+1)v, u(v+2) \right).$$

La matrice jacobienne de G est alors

$$\begin{aligned} J_G(u, v) &= \begin{pmatrix} \partial_u G_1(u, v) & \partial_v G_1(u, v) \\ \partial_u G_2(u, v) & \partial_v G_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2v(v+2)}{(1-2uv)^2} & \frac{4u+1}{(1-2uv)^2} \\ \frac{v+2}{(1-2uv)^2} & \frac{u(4u+1)}{(1-2uv)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-2uv)^2} \begin{pmatrix} 2v(v+2) & 4u+1 \\ v+2 & u(4u+1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

iii) On commence par calculer l'inverse de $J_H(x, y)$. On a

$$\det(J_H(x, y)) = \frac{2xy}{(x+2)^2(2y+1)^2} - \frac{1}{(x+2)(2y+1)} = -\frac{x+4y+2}{(x+2)^2(2y+1)^2}$$

et donc

$$\begin{aligned} (J_H(x, y))^{-1} &= \frac{(x+2)^2(2y+1)^2}{x+4y+2} \begin{pmatrix} \frac{2x}{(2y+1)^2} & \frac{1}{x+2} \\ \frac{1}{2y+1} & \frac{y}{(x+2)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x+4y+2} \begin{pmatrix} 2x(x+2)^2 & (x+2)(2y+1)^2 \\ (x+2)^2(2y+1) & y(2y+1)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Afin d'évaluer $(J_H(x, y))^{-1}$ en $G(u, v)$, on commence par évaluer les quelques termes qui apparaissent souvent. Comme

$$x = \frac{(4u+1)v}{1-2uv} \quad \text{et} \quad y = \frac{u(v+2)}{1-2uv}$$

par définition de G , on obtient

$$\begin{aligned} x+4y+2 &= \frac{(4u+1)v + 4u(v+2) + 2 - 4uv}{1-2uv} = \frac{4uv + v + 8u + 2}{1-2uv} = \frac{(4u+1)(v+2)}{1-2uv} \\ x+2 &= \frac{(4u+1)v + 2 - 4uv}{1-2uv} = \frac{v+2}{1-2uv} \\ 2y+1 &= \frac{2u(v+2) + 1 - 2uv}{1-2uv} = \frac{4u+1}{1-2uv} \end{aligned}$$

et donc la matrice est

$$\begin{aligned} (J_H(x, y))^{-1} \Big|_{(x,y)=G(u,v)} &= \frac{1-2uv}{(4u+1)(v+2)} \begin{pmatrix} \frac{2(4u+1)v}{1-2uv} \left(\frac{v+2}{1-2uv}\right)^2 & \frac{v+2}{1-2uv} \left(\frac{4u+1}{1-2uv}\right)^2 \\ \left(\frac{v+2}{1-2uv}\right)^2 \frac{4u+1}{1-2uv} & \frac{u(v+2)}{1-2uv} \left(\frac{4u+1}{1-2uv}\right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-2uv)^2} \begin{pmatrix} 2v(v+2) & 4u+1 \\ v+2 & u(4u+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une comparaison avec (5) montre qu'on a bien $(J_H(x, y))^{-1} \Big|_{(x,y)=G(u,v)} = J_G(u, v)$.

Exercice 6.

On a $f(x, y) = \bar{f}(u(x, y), v(x, y)) = \bar{f}(2x-y, x+3y)$. En utilisant la formule pour la dérivation de fonctions composées du cours et la règle de la dérivée d'un produit, on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Les dérivées analogues par rapport à y , c.-à-d. $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, sont obtenues en remplaçant x par y ci-dessus. En substituant

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

98

dans les expressions pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \\ &\quad + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= 5 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial u \partial v} + 10 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial v^2}\end{aligned}$$

Analyse avancée II – Corrigé de la série 8B

Échauffement. (Limite d'une fonction et continuité)

i) Définition de la limite en un point :

(a) Définition avec les suites

Une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ admet $\ell \in \mathbb{R}^m$ comme limite en $x^* \in \mathbb{R}^n$ lorsque x tend vers x^* , si pour toute suite $(x_k)_{k \geq 0}$, $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$, qui converge vers x^* , la suite $(y_k)_{k \geq 0}$, $y_k = f(x_k) \in \mathbb{R}^m$, converge vers ℓ .

(b) Définition avec ε et δ

Une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ admet $\ell \in \mathbb{R}^m$ comme limite en $x^* \in \mathbb{R}^n$ lorsque x tend vers x^* , si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \|x - x^*\| \leq \delta$ implique $\|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$.

Montrons maintenant l'équivalence des deux définitions.

(a) Limite selon ε et $\delta \Rightarrow$ limite selon la définition avec les suites

Supposons l'existence d'une limite selon la définition avec ε et δ . Soit une suite quelconque $(x_k)_{k \geq 0}$, $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$ qui converge vers x^* . Alors, par la définition de la convergence d'une suite, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k \geq k_0$, $0 < \|x_k - x^*\| \leq \delta$. Donc, par la définition de la limite par ε et δ , $\forall k \geq k_0$, $\|f(x_k) - \ell\| \leq \varepsilon$, ce qui par la définition de la convergence d'une suite veut dire que la suite $(y_k)_{k \geq 0}$, $y_k = f(x_k) \in \mathbb{R}^m$, converge vers ℓ .

(b) Limite selon la définition avec les suites \Rightarrow limite selon ε et δ

Raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ admette $\ell \in \mathbb{R}^m$ comme limite en $x^* \in \mathbb{R}^n$ lorsque x tend vers x^* selon la définition avec les suites, mais que ℓ n'est pas la limite de f en $x^* \in \mathbb{R}^n$ selon la définition avec ε et δ . Alors, $\exists \varepsilon > 0$, tel que $\forall \delta > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}^n$, tel que $0 < \|x - x^*\| \leq \delta$ et $\|f(x) - \ell\| > \varepsilon$ (voir la série 1B pour la négation d'une implication logique). En particulier donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_k \in \mathbb{R}^n$, tel que $0 < \|x_k - x^*\| \leq \delta_k \equiv \frac{1}{k}$ et $\|f(x_k) - \ell\| > \varepsilon$. La suite $(x_k)_{k \geq 1}$ converge donc, par la définition de la convergence d'une suite, vers x^* , et donc $(y_k)_{k \geq 0}$, $y_k = f(x_k) \in \mathbb{R}^m$ converge vers ℓ , en contradiction avec $\|f(x_k) - \ell\| > \varepsilon$. En conclusion, f admet ℓ comme limite selon la définition avec ε et δ .

ii) Les définitions de la continuité en un point sont identiques aux définitions de la limite, mais avec $\ell \in \mathbb{R}^m$ remplacé par $f(x^*) \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 1. (Inégalité de Young et de Hölder et équivalence de normes)

i) Inégalité de Young

Soit $1 < p < +\infty$ et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On doit montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. D'abord, si $a = 0$ ou $b = 0$ (donc aussi si $a = b = 0$), l'inégalité est

triviale. Supposons donc que $a > 0$ et $b > 0$ et soit $g(s) = -\ln(s)$. On a pour tout $s \in]0, +\infty[$ que $g''(s) = \frac{1}{s^2} > 0$. Ainsi, la fonction g est convexe sur $]0, +\infty[$. Puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a donc pour $1 < p < +\infty$ que

$$g\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \leq \frac{1}{p}g(a^p) + \frac{1}{q}g(b^q)$$

et de suite que

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab).$$

La fonction \ln étant strictement croissante, ceci n'est possible que si

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

ii) Inégalité de Hölder

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien. On doit montrer que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

(a) Si $p = 1$ et $q = +\infty$, on a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right) \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

(b) Soit maintenant $p \in]1, +\infty[$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, c'est-à-dire $q = \frac{p}{p-1}$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité est triviale. On peut donc supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et en utilisant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| = \sum_{i=1}^n \lambda |x_i| \cdot \frac{1}{\lambda} |y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \lambda^p |x_i|^p + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q} \frac{1}{\lambda^q} |y_i|^q = \frac{1}{p} \lambda^p \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\lambda^q} \|y\|_q^q. \end{aligned}$$

Si on pose $\lambda = \|x\|_p^{-1/q} \|y\|_q^{1/p}$ on obtient, puisque $p - \frac{p}{q} = q - \frac{q}{p} = 1$,

$$\lambda^p \|x\|_p^p = \|x\|_p^{-p/q} \|y\|_q \|x\|_p^p = \|x\|_p \|y\|_q,$$

et

$$\frac{1}{\lambda^q} \|y\|_q^q = \|x\|_p \|y\|_q^{-q/p} \|y\|_q^q = \|x\|_p \|y\|_q.$$

Ainsi,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{p} \|x\|_p \|y\|_q + \frac{1}{q} \|x\|_p \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q.$$

iii) $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \geq 1$ mais n'est pas une norme pour $0 < p < 1$.
 On va montrer que pour $p \geq 1$ l'inégalité triangulaire est satisfaite mais pas pour $p < 1$.
 Les autres propriétés d'une norme sont satisfaites pour tous les p .

(a) Soit $p \geq 1$ et soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Alors,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}. \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Hölder $\langle a, b \rangle \leq \|a\|_p \|b\|_q$ avec

$$\begin{aligned} a &= (|x_1|, \dots, |x_n|) \\ b &= (|x_1 + y_1|^{p-1}, \dots, |x_n + y_n|^{p-1}) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} &= \langle a, b \rangle \leq \|a\|_p \|b\|_q \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Rappelant que, puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p} (p-1)$ et $(p-1)q = p$, de sorte que

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|x\|_p \|x + y\|_p^{p-1}.$$

On obtient de la même manière que

$$\sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x + y\|_p^{p-1},$$

et on a donc

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1}.$$

De cette inégalité on obtient l'inégalité triangulaire recherchée, en divisant à gauche et à droite par $\|x + y\|_p^{p-1}$ si $\|x + y\|_p \neq 0$. Si $\|x + y\|_p = 0$, l'inégalité triangulaire est trivialement satisfaite. Les autres propriétés d'une norme sont immédiates.

(b) Soit $p < 1$ et soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, où $x = (1, 0, \dots, 0)$ et $y = (0, \dots, 0, 1)$. On a $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$, mais $\|x + y\|_p = 2^{1/p} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p$, ce qui montre que l'inégalité triangulaire n'est pas toujours satisfaite, et $\|\cdot\|_p$ n'est donc pas une norme.

iv) Inégalités

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, et posons $|x| := (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. Soit $p > 1$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors,

(a) En posant $y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ on obtient

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \langle |x|, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q = n^{1/q} \|x\|_p$$

(b) On a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p \right)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty$$

(c) On a

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Montrons maintenant que les normes $\|\cdot\|_p$ sont toutes équivalentes. En effet, soient $p, r \in [1, +\infty]$ et soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_r \leq n^{1/r} \|x\|_\infty \leq n^{1/r} \|x\|_1 \leq n^{1/r} n^{1/q} \|x\|_p \leq n^{1/r+1/q} \|x\|_p,$$

et de la même manière on trouve que

$$\|x\|_p \leq n^{1/p+1/s} \|x\|_r,$$

où s est tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

Exercice 2. (Normes sur applications linéaires)

i) Par la linéarité de L et de la norme on a

$$\|L\|_{p,q} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Lx\|_q}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_p=1}} \|Lx\|_q,$$

et donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\|\lambda L\|_{p,q} = |\lambda| \|L\|_{p,q}$. Par l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_q$ on a $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\|L_1 + L_2\|_{p,q} \leq \|L_1\|_{p,q} + \|L_2\|_{p,q}$ et finalement $\|L\|_{p,q} = 0 \Rightarrow L = 0$, car sinon il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Lx \neq 0$ et donc $\|Lx\|_q \neq 0$.

ii) Par rapport aux bases de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m on a pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(Lx)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \quad i = 1, \dots, m,$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |(Lx)_i| &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| |x_j| \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |a_{i,j}| \right) |x_j| \leq \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| \end{aligned}$$

ce qui montre que $\|L\|_{1,1} \leq \sup_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|_1$. De plus, puisque $\|Lx^j\| = \|A_j\|_1$ pour $x^j = (0 \dots 0, x_j = 1, 0 \dots 0)$, on a aussi $\|L\|_{1,1} \geq \sup_{1 \leq j \leq n} \|A_j\|_1$, ce qui montre l'égalité.

iii) Par rapport aux bases de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m on a pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(Lx)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \quad i = 1, \dots, m$$

et donc

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i \leq m} |(Lx)_i| &= \sup_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sup_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq m} \left(\left(\sup_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right) \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \\ &= \left(\sup_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right) \left(\sup_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\|L\|_{\infty, \infty} \leq \sup_{1 \leq i \leq m} \|A_i\|_1$. De plus, pour le bon choix des vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ de norme $\|x\|_{\infty} = 1$ de la forme $x = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ on a

$$(Lx)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \|A_i\|_1, \quad i = 1, \dots, m,$$

et on a donc aussi que $\|L\|_{\infty, \infty} \geq \sup_{1 \leq i \leq m} \|A_i\|_1$, ce qui montre l'égalité.

iv) Par rapport aux bases de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m on a pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Lx\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^T A x \rangle$$

avec $\langle \rangle$ le produit scalaire Euclidien et A^T la matrice transposée de A . La matrice $A^T A$ étant réel symétrique, il existe une matrice orthogonale O telle que $O^T A^T A O = D$, avec D la matrice diagonale qui contient les valeurs propres $\lambda_j \geq 0$, $j = 1 \dots n$ de la matrice $A^T A$. Par conséquence

$$\begin{aligned} \|L\|_{2,2} &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Lx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=1}} \|Lx\|_2 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_2=1}} \sqrt{\langle x, A^T A x \rangle} \\ &= \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sqrt{\langle y, Dy \rangle} = \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2} = \sqrt{\sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\sup_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \right) \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|_2=1}} \sum_{j=1}^n y_j^2} = \sqrt{\sup_{1 \leq j \leq n} \lambda_j}. \end{aligned}$$

D'autres part pour $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur propre normalisé de la plus grande valeur propre λ de $A^T A$ on a

$$\sqrt{\langle x, A^T A x \rangle} = \sqrt{\lambda}$$

et donc $\|L\|_{2,2} \geq \sqrt{\lambda}$, ce qui montre l'égalité.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 9A

Echauffement.

i) On a la fonction $G: \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec

$$G(\rho, \theta, \varphi) = (G_1(\rho, \theta, \varphi), G_2(\rho, \theta, \varphi), G_3(\rho, \theta, \varphi)),$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad x &= G_1(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ y &= G_2(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z &= G_3(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos(\theta). \end{aligned}$$

Cette fonction est surjective mais pas injective.

ii) On vérifie par un calcul direct que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Ainsi les points (x, y, z) sont bien sur la sphère de rayon ρ .

iii) On restreint $G(\rho, \theta, \varphi)$ à l'ensemble ouvert $\tilde{D} = \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$. Sur cet ensemble G est injective et

$$G: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$$

est bijective. La matrice jacobienne de G est

$$\begin{aligned} J_G(\rho, \theta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_1}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_1}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial G_2}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_2}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_2}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial G_3}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_3}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial G_3}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

iv) On vérifie que $\det(J_G)$ est

$$\begin{aligned} \det(J_G) &= \rho^2 (\sin^3 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin \theta \sin^2 \varphi + \sin^3 \theta \cos^2 \varphi) \\ &= \rho^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Exercice 1.

On se contente de vérifier la formule proposée plutôt que la retrouver parce que les calculs sont moins longs. On remarque d'abord que la formule donnée est équivalente à

$$\rho^2 \Delta F = 2\rho \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \rho^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin(\theta)^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2}, \quad (1)$$

et donc on va exprimer les éléments qui apparaissent à droite de (1) en fonction de dérivées partielles de F par rapport à x , y et z . Comme $\bar{F} = F \circ G$ avec G comme à l'Exercice 5 il faut dériver en chaîne. Pour simplifier on utilise la notation courte pour les composantes de $J_G(\rho, \theta, \varphi)$, c.-à-d. on écrit $\frac{\partial x}{\partial \rho}$ pour $\frac{\partial G_1}{\partial \rho}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$ pour $\frac{\partial G_2}{\partial \theta}$ etc.

Pour ρ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial F}{\partial x} \sin(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial y} \sin(\theta) \sin(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial z} \cos(\theta) \\ \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \cos(\theta) \\ &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \sin(\theta) \cos(\varphi) + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \sin(\theta) \sin(\varphi) + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) \cos(\theta) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \sin(\theta)^2 \cos(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \sin(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \cos(\theta)^2 + \\ &\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} 2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi). \end{aligned}$$

De même pour θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial x} \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial y} \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial z} \rho \sin(\theta) \\ \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cos(\theta) \right) \cdot \rho \cos(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cos(\theta) \right) \cdot \rho \sin(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \sin(\theta) \right) \cdot \rho \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot \cos(\theta) - \frac{\partial F}{\partial x} \sin(\theta) \right] \rho \cos(\varphi) + \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \cos(\theta) - \frac{\partial F}{\partial y} \sin(\theta) \right] \rho \sin(\varphi) \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \sin(\theta) + \frac{\partial F}{\partial z} \cos(\theta) \right] \rho \\ &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial x} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y} \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \rho \sin(\theta) - \frac{\partial F}{\partial z} \rho \cos(\theta) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \rho^2 \cos(\theta)^2 \cos(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \rho^2 \cos(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \rho^2 \sin(\theta)^2 + \\ &\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} 2 \rho^2 \cos(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} 2 \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} 2 \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ &\quad - \frac{\partial F}{\partial x} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y} \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial z} \rho \cos(\theta) \end{aligned}$$

et pour φ :

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial F}{\partial x} \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial y} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2} &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sin(\varphi) \right) \cdot \rho \sin(\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cos(\varphi) \right) \cdot \rho \sin(\theta) \\
&= -\left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot \sin(\varphi) + \frac{\partial F}{\partial x} \cos(\varphi) \right] \rho \sin(\theta) + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y} \sin(\varphi) \right] \rho \sin(\theta) \\
&= -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial x} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) + \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y} \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \rho^2 \sin(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} 2\rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\
&\quad - \frac{\partial F}{\partial x} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) - \frac{\partial F}{\partial y} \rho \sin(\theta) \sin(\varphi)
\end{aligned}$$

Maintenant on peut remplacer les termes obtenues dans la partie droite de (1) qui est rappelée ci-dessous :

$$2\rho \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \rho^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin(\theta)^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \varphi^2} . \quad (2)$$

Pour ne pas perdre la vue d'ensemble en regroupant les coefficients de chaque dérivée partielle de F , on fait un tableau qu'on remplit au fur et à mesure en évaluant les termes dans (2).

Terme	Coefficient	Résultat
$\frac{\partial F}{\partial x}$	$2\rho \sin(\theta) \cos(\varphi) + \rho \frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)} \cos(\varphi) - \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) - \rho \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)}$	$= 0^*$
$\frac{\partial F}{\partial y}$	$2\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) + \rho \frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)} \sin(\varphi) - \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) - \rho \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)}$	$= 0^*$
$\frac{\partial F}{\partial z}$	$2\rho \cos(\theta) - \rho \cos(\theta) - \rho \cos(\theta)$	$= 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$	$\rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi)^2 + \rho^2 \cos(\theta)^2 \cos(\varphi)^2 + \rho^2 \sin(\varphi)^2$	$= \rho^2$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	$\rho^2 \sin(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \rho^2 \cos(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \rho^2 \cos(\varphi)^2$	$= \rho^2$
$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$	$\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2$	$= \rho^2$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$	$2\rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + 2\rho^2 \cos(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - 2\rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)$	$= 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$	$2\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) - 2\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi)$	$= 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$	$2\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi) - 2\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi)$	$= 0$

*Pour simplifier les termes avec les fractions il faut mettre en évidence $\rho \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)}$ respectivement $\rho \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)}$.

Puisqu'on a obtenu que (2) est égal à $\rho^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = \rho^2 \Delta F$, on a bien démontré la formule pour le laplacien de F .

Exercice 2.

Les fonctions F données sont des intégrales dépendant d'un paramètre de la forme

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx.$$

Si les fonctions f , a et b sont de classe C^1 , la dérivée de F est (cf. cours)

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(b(t), t) \cdot b'(t) - f(a(t), t) \cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx. \quad (3)$$

- i) On a $f(x, t) = \frac{x^t + \sin(x)}{\ln(x)} \in C^1(]2, 3[\times]1, \infty[)$, $a(t) = 2$ et $b(t) = 3$ avec $a, b \in C^1(\mathbb{R})$.
Puisque les bornes sont constantes, le membre de droite de (3) consiste uniquement de l'intégrale et on a

$$F'(t) = \int_2^3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x^t + \sin(x)}{\ln(x)} \right) dx = \int_2^3 \frac{x^t \ln(x)}{\ln(x)} dx = \int_2^3 x^t dx = \left[\frac{x^{t+1}}{t+1} \right]_2^3 = \frac{3^{t+1} - 2^{t+1}}{t+1}.$$

- ii) On a $f(x, t) = \ln(x^2 + t^2) \in C^1(]1, \infty[\times]1, \infty[)$, $a(t) = t$ et $b(t) = t^2$ avec $a, b \in C^1(\mathbb{R})$.
Les bornes dépendent de t . On a

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d(t^2)}{dt} \cdot \ln((t^2)^2 + t^2) - \frac{d(t)}{dt} \cdot \ln(t^2 + t^2) + \int_t^{t^2} \frac{\partial}{\partial t} (\ln(x^2 + t^2)) dx \\ &= 2t \ln(t^2(t^2 + 1)) - \ln(2t^2) + \int_t^{t^2} \frac{2t}{x^2 + t^2} dx. \end{aligned}$$

Puisque $2t \int_t^{t^2} \frac{1}{x^2 + t^2} dx = \left[\frac{2t}{t} \arctan\left(\frac{x}{t}\right) \right]_t^{t^2} = 2 \arctan(t) - \frac{\pi}{2}$, on a finalement

$$F'(t) = 2t \ln(t^2(t^2 + 1)) - \ln(2t^2) + 2 \arctan(t) - \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3.

Ces fonctions sont de nouveau de la forme (3).

- i) Ici on a $f(x, t) = \frac{\sin(\cos(tx))}{x} \in C^1(]0, \infty[\times]0, \infty[)$, $a(t) = \sqrt{t}$ et $b(t) = \frac{1}{t}$ avec $a, b \in C^1(]0, \infty[)$. Ainsi

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\sin(\cos(t\frac{1}{t}))}{\frac{1}{t}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) - \frac{\sin(\cos(t\sqrt{t}))}{\sqrt{t}} \cdot \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) + \int_{\sqrt{t}}^{1/t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(\cos(tx))}{x} \right) dx \\ &= -\frac{\sin(\cos(1))}{t} - \frac{\sin(\cos(t^{3/2}))}{2t} + \int_{\sqrt{t}}^{1/t} \cos(\cos(tx)) (-\sin(tx)) dx \\ &= -\frac{\sin(\cos(1))}{t} - \frac{\sin(\cos(t^{3/2}))}{2t} + \left[\frac{\sin(\cos(tx))}{t} \right]_{\sqrt{t}}^{1/t} = -\frac{3 \sin(\cos(t^{3/2}))}{2t}. \end{aligned}$$

ii) Pour $f(x, t) = \frac{e^{tx^3}}{x} \in C^1(]0, \infty[\times]0, \infty[)$, $a(t) = 1$ et $b(t) = \sqrt[3]{t}$ avec $a, b \in C^1(]0, \infty[)$, seulement la borne supérieure dépend de t si bien que le terme en $f(a(t), t)$ n'apparaît pas.

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{e^{tx^3}}{x} \Big|_{x=\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{d}{dt} (\sqrt[3]{t}) + \int_1^{\sqrt[3]{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{tx^3}}{x} \right) dx \\ &= \frac{e^{t^2}}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{1}{3} t^{-2/3} + \int_1^{\sqrt[3]{t}} x^2 e^{tx^3} dx = \frac{1}{3} \frac{e^{t^2}}{t} + \left[\frac{1}{3t} e^{tx^3} \right]_1^{\sqrt[3]{t}} \\ &= \frac{1}{3t} (e^{t^2} - e^t) + \frac{1}{3} \frac{e^{t^2}}{t} = \frac{1}{3t} (2e^{t^2} - e^t), \end{aligned}$$

et donc $F'(1) = \frac{1}{3}e$. En fait, puisque pour $t = 1$ l'intégrale s'anule on a pas besoin de calculer ce terme et on a directement $F'(1) = \frac{1}{3} \frac{e^{t^2}}{t} \Big|_{t=1} = \frac{1}{3}e$.

Exercice 4.

Q1 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$, une fonction de classe C^1 et soient $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 . Alors la fonction

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

est de classe C^1 et on a

$$F'(t) = f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Vrai, voir le cours.

Exercice 5.

i) Comme on veut utiliser le théorème des fonctions implicites, il faut vérifier que toutes ses hypothèses sont satisfaites. On commence par calculer les dérivées partielles de F . On a

$$F_x = \partial_x F = 6x^2 - 2xy^4 + 3 \quad \text{et} \quad F_y = \partial_y F = -4x^2y^3 + 6y^2,$$

qui sont continues sur \mathbb{R}^2 et donc F est de classe C^1 . Comme on veut trouver une fonction définie au voisinage de 0, on pose $x_0 = 0$. L'équation $F(0, y_0) = 2y_0^3 - 2 = 0$ implique alors que $y_0 = 1$. De plus $F_y(0, 1) = 6 \neq 0$.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui nous dit que l'équation $F(x, y) = 0$ définit une fonction implicite $y = f(x)$ dans un voisinage de 0 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $f(0) = 1$. De plus on a

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = \frac{6x^2 - 2xf(x)^4 + 3}{4x^2f(x)^3 - 6f(x)^2}$$

et ainsi $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Le graphe de la fonction f se trouve à la Fig. 1.

ii) Les dérivées partielles de F sont

$$F_x = e^y + ye^x \quad \text{et} \quad F_y = e^x + xe^y,$$

qui sont continues sur \mathbb{R}^2 et donc F est de classe C^1 . On a de nouveau $x_0 = 0$ et $F(0, y_0) = y_0 + 2 = 0 \Rightarrow y_0 = -2$. Comme en plus, $F_y(0, -2) = 1 \neq 0$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Ainsi il existe une fonction $y = f(x)$ définie implicitement par l'équation $F(x, y) = 0$ dans un voisinage de 0 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $f(0) = -2$. De plus on a

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = -\frac{e^{f(x)} + f(x)e^x}{e^x + xe^{f(x)}},$$

et ainsi $f'(0) = 2 - \frac{1}{e^2} \approx 1.865$. Pour le graphe de f , voir Fig. 2.

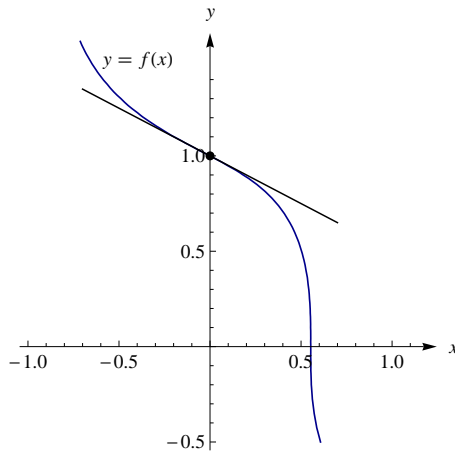


Figure 1

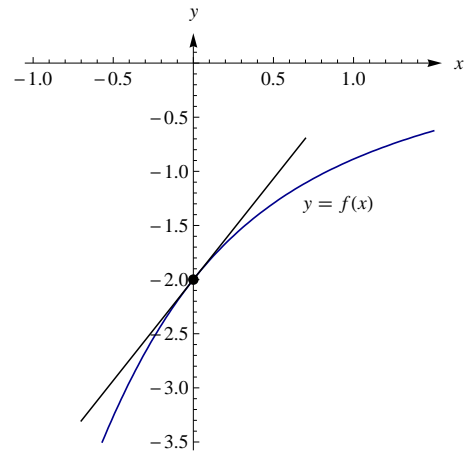


Figure 2

Exercice 6.

Q1 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$$

et on considère la fonction $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ implicitement définie par l'équation

$$f(x, y, g(x, y)) = 11.$$

Sachant que $g(1, 3) = -2$, on a

- $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0$
- $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{12}{5}$
- $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{9}{2}$
- $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 11$

En dérivant l'équation $f(x, y, g(x, y)) = 11$ par rapport à x on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$$

et donc, puisque $g(1, 3) = -2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, -2) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, -2) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, -2)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, -2)} = \left[-\frac{-9yx^2}{6z^2 - 6y} \right]_{(x,y,z)=(1,3,-2)} \\ &= -\frac{-27}{24 - 18} = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 7.

Soit $f(x, y) = x^3y + x^2 + y^2$. L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) , où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est (voir le cours)

$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Puisque $\partial_x f(x, y) = 3x^2y + 2x$ et $\partial_y f(x, y) = x^3 + 2y$, l'équation s'écrit pour $(x_0, y_0) = (1, 1)$:

$$z = 3 + 5(x - 1) + 3(y - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 3y - z = 5.$$

Exercice 8.

Par le théorème des fonctions implicites, l'équation $F(x, y, z) = 0$ définit localement une fonction $z = f(x, y)$ de classe C^1 telle que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ et $z_0 = f(x_0, y_0)$. Comme f est différentiable car C^1 , l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est (voir § 4.2 du cours)

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

donc

$$(z - z_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (4)$$

En utilisant les relations entre les dérivées partielles de f et F données par le théorème des fonctions implicites, (4) s'écrit

$$\begin{aligned}(z - z_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0,\end{aligned}$$

où \cdot dénote le produit scalaire. Comme cette dernière équation est vraie pour tout (x, y, z) proche de (x_0, y_0, z_0) , le gradient de F en (x_0, y_0, z_0) est orthogonal au plan tangent en ce point.

Remarque: Formellement le gradient ∇f d'une fonction f est un vecteur colonne. Mais pour alléger la notation dans les corrigés, on l'écrit comme vecteur ligne.

Exercice 9. Soit $F(x, y, z) = xz^2 - 2x^2y + y^2z$. En évaluant F au point $(1, 1, z_0)$ on a

$$F(1, 1, z_0) = 0 \Leftrightarrow z_0^2 - 2 + z_0 = 0 \Leftrightarrow z_0 = 1 \text{ ou } z_0 = -1$$

Selon le cours sur les fonctions implicites, l'équation du plan tangent à la surface $F(x, y, z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) est

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \text{où } \mathbf{r} = (x, y, z) \text{ et } \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

Puisque

$$\nabla F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F) = (z^2 - 4xy, -2x^2 + 2yz, 2xz + y^2),$$

on a pour le point $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$

$$\nabla F(1, 1, 1) = (-3, 0, 3)$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(x - 1) + 0(y - 1) + 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - z = 0.$$

Pour $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -2)$ on a

$$\nabla F(1, 1, -2) = (0, -6, -3)$$

et l'équation du plan tangent est

$$\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z + 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0(x - 1) - 6(y - 1) - 3(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 2y + z = 0.$$

Analyse avancée II – Corrigé de la série 9B

Échauffement. (Dérivation sous l'intégrale)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, par le théorème des accroissements finis (voir Analyse I), $\forall h \in \mathbb{R}, 0 < |h| \leq 1$, $\exists \theta \equiv \theta(h) \in]0, 1[$, tel que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt \right| &= \left| \int_0^1 \left(\frac{g(x+h, t) - g(x, t)}{h} - \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x + \theta h, t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x + \theta h, t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| dt. \end{aligned}$$

La fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ est uniformément continue sur $[x-1, x+1] \times [0, 1]$ (voir le cours de lundi semaine 11), ce qui implique que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}, 0 < \delta \leq 1$, tel que $\forall h \in \mathbb{R}, |h| \leq \delta$ et $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x + \theta h, t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varepsilon,$$

et donc

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre (par la définition de la limite $h \rightarrow 0$, voir Analyse I) que f est différentiable en x et que

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt.$$

La continuité de la fonction f' en x donné suit aussi de la continuité uniforme de la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ sur $[x-1, x+1] \times [0, 1]$ car, comme dans la borne précédente, on a que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}, 0 < \delta \leq 1$ tel que $y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \delta$ implique

$$|f'(x) - f'(y)| \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial g}{\partial x}(y, t) \right| dt \leq \varepsilon.$$

Exercice 1. (Dérivation sous l'intégrale)

Soit $x \in \mathbb{R}$. La formule de dérivation sous l'intégrale donne

$$f'(x) = \sin(x\sqrt{1+x^2}) + \int_0^x \sqrt{1+t^2} \cos(x\sqrt{1+t^2}) dt$$

et en particulier, $f'(0) = 0$. En appliquant une deuxième fois la formule de dérivation sous l'intégrale on obtient

$$f''(x) = \cos\left(x\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \sqrt{1+x^2} \cos\left(x\sqrt{1+x^2}\right) - \int_0^x (1+t^2) \sin\left(x\sqrt{1+t^2}\right) dt$$

et donc en particulier, $f''(0) = 2$. Ainsi, f admet bien un minimum local en 0.

Exercice 2. (La fonction Gamma)

Nous commençons par donner quelques pistes concernant l'estimation d'intégrales. Comment peut-on montrer par exemple, que quelque soit $N \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\int_0^\infty t^N e^{-t} dt$$

converge? Dans ce cas précis on peut intégrer N fois par parties pour trouver que l'intégrale vaut $N!$, mais le plus souvent il ne sera pas possible de calculer une intégrale explicitement et il faut se servir de la continuité et d'autres propriétés de la fonction pour démontrer la convergence. Dans le cas présent on peut se convaincre que, donné N , il existe une constante $C > 0$ telle que

$$t^N e^{-t} \leq C e^{-t/2}.$$

Le choix de $e^{-t/2}$ à droite est juste un choix possible, le but étant de borner la fonction donnée par une fonction simple à intégrer. En divisant par $e^{-t/2}$ on voit que l'on obtient l'inégalité donnée en définissant C par

$$C = \sup_{t \geq 0} t^N e^{-t/2}$$

(voir (Fig. 1)). Nous allons nous servir de ce genre d'estimation dans ce qui suit.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$ l'intégrale qui définit $\Gamma(x)$ existe au sens d'une intégrale impropre sur $]0, +\infty[$ et la fonction Γ est donc bien définie.

i) Soit $g(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$. On a que $g \in C^1(]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln(t) t^{x-1} e^{-t}.$$

Pour montrer que $\Gamma \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ il suffit de montrer que Γ est de classe C^1 dans un voisinage de tout point $x \in]0, +\infty[$. Soit donc $x \in]0, +\infty[$ et soit $I = [c, d]$, où $c, d \in \mathbb{R}$, $0 < c < x < d$. Pour $x \in I$, les intégrales

$$\int_0^\infty g(x, t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$$

convergent absolument et donc uniformément (voir la définition et la remarque du cours) car

$$|g(x, t)| \leq C t^{c-1} e^{-t/2}, \quad \text{où} \quad C = \sup_{\substack{c \leq x \leq d \\ t \geq 0}} \frac{|g(x, t)|}{t^{c-1} e^{-t/2}} < \infty,$$

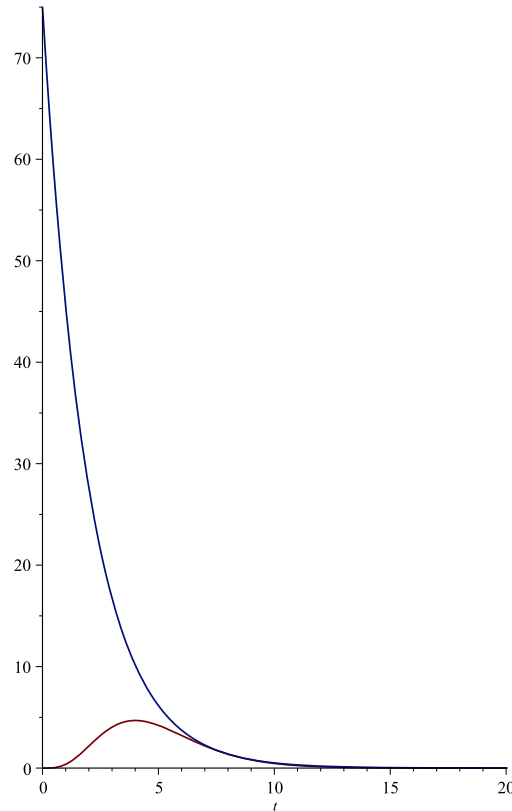


Figure 1: La fonction $t^4 e^{-t}$ est bornée par la fonction $Ce^{-t/2}$ avec $C = \frac{4096}{e^4}$

et, pour $c' \in \mathbb{R}$, $0 < c' < c$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)(x, t) \right| \leq C' t^{c'-1} e^{-t/2}, \quad \text{où} \quad C' = \sup_{\substack{c' \leq x \leq d \\ t \geq 0}} \frac{\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right|}{t^{c'-1} e^{-t/2}} < \infty,$$

et les fonctions $t^{c-1} e^{-t/2}$ et $t^{c'-1} e^{-t/2}$ sont positives et intégrables au sens des intégrales généralisées. On peut donc dériver sous l'intégrale et l'on obtient que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Remarque : pour être précis, vu que pour $x < 1$ l'intégrale est impropre en $t = 0$ et $t = +\infty$, on coupe l'intégrale en une intégrale entre 0 et 1 et une intégrale entre 1 et $+\infty$. La convergence uniforme en $t = 0$ est définie en termes de celle à l'infini en effectuant le changement de coordonnées $t = 1/s$, ce qui revient à faire les vérifications indiquées.

ii) On a que $g \in C^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) = \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t},$$

ce qui permet de montrer par récurrence que $\Gamma \in C^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, car pour $c' \in \mathbb{R}$,

$0 < c' < c, \forall k \in \mathbb{R},$

$$\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq C'(k) t^{c'-1} e^{-t/2}, \quad \text{où} \quad C'(k) = \sup_{\substack{c' \leq x \leq d \\ t \geq 0}} \left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| < \infty,$$

et les fonctions $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}$ sont donc toutes uniformément intégrables en t . On peut donc dériver sous l'intégrale et l'on obtient que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

iii) Pour $x > 0$, on obtient par intégration par partie (sur l'intervalle $[\varepsilon, R]$, puis passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0+$ et $R \rightarrow +\infty$) que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = 0 + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).$$

De plus $\Gamma(1) = 1$, ce qui implique par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Exercice 3. (Intégrales généralisées, procédure de “cut-off”)

i) Pour $0 < \varepsilon < 1$ et $R > 1$, on obtient par intégration par partie que

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_{\varepsilon}^R + \int_{\varepsilon}^R \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt,$$

ce qui implique que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt$$

existe, car $\forall t > 0, \cos(t) \geq 1 - \frac{1}{2}t^2$ (critère pour le reste pour les séries numériques alternées) et donc

$$\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{t^2} \right\} \leq \frac{5}{2} \frac{1}{1+t^2},$$

(voir (Fig. 2), ce qui montre que

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt \leq \frac{5\pi}{4}.$$

ii) Soit $\forall t \neq 0, g(x, t) = e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}$ et $g(x, 0) = 1$. On a que $g \in C^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc $g \in C^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Puisque $\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| < 1$, on a $|g(x, t)| \leq e^{-tx}$ et par conséquent pour $x \in]0, +\infty[, f(x)$ est bien définie. Pour montrer que f est de classe $C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$

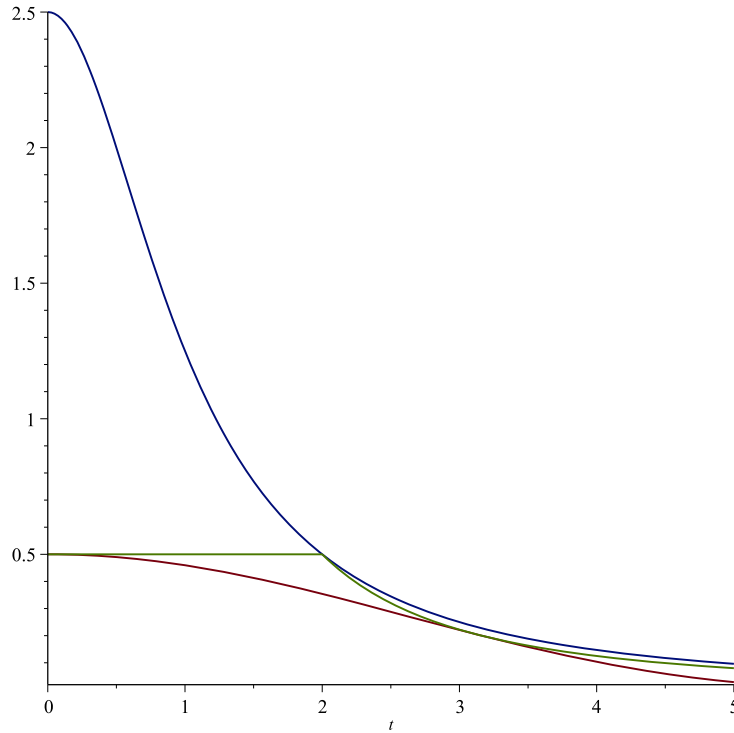


Figure 2: Les fonctions $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$, $\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2}\right\}$ et $\frac{5}{2} \frac{1}{1+t^2}$

il faut montrer la convergence uniforme (en x) des intégrales de g et $\frac{\partial g}{\partial x}$ sur t . De nouveau l'idée est d'intégrer par partie. Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathbb{R}_+$. Si $x > 1$, alors si $A \geq -\ln(\varepsilon)$,

$$\left| \int_A^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \int_A^{+\infty} e^{-t} dt \leq e^{-A} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que pour $x > 1$ l'intégrale est bien uniformément convergente. Pour le cas où $0 < x \leq 1$, nous allons effectuer deux intégrations par parties. Soit $A > 0$. Puisque toutes les limites en $+\infty$ des fonctions concernées sont nulles, nous avons

$$\begin{aligned} I_A &:= \int_A^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt = e^{-Ax} \frac{\cos(A)}{A} - \int_A^{+\infty} e^{-tx} \frac{\cos(t)}{t^2} dt - x \int_A^{+\infty} e^{-tx} \frac{\cos(t)}{t} dt \\ &= e^{-Ax} \frac{\cos(A)}{A} - \int_A^{+\infty} e^{-tx} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \\ &\quad + x e^{-Ax} \frac{\sin(A)}{A} - x^2 \int_A^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt - x \int_A^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t^2} dt, \\ &= e^{-Ax} \frac{\cos(A)}{A} - \int_A^{+\infty} e^{-tx} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \\ &\quad + x e^{-Ax} \frac{\sin(A)}{A} - x^2 I_A - x \int_A^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t^2} dt, \end{aligned}$$

et donc, en isolant I_A , et puisque la valeur absolue de toutes les fonctions cosinus, sinus et exponentielles présentes peuvent être majorées par 1, nous obtenons pour $A \geq \frac{4}{\varepsilon}$

$$\left| \int_A^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{1+x}{A} + (1+x) \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \right) \leq \frac{4}{A} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que pour $0 < x \leq 1$ l'intégrale est bien uniformément convergente. En résumé, en choisissant $A \geq \max \left\{ \frac{4}{\varepsilon}, -\ln(\varepsilon) \right\}$, ceci démontre la convergence uniforme de l'intégrale qui définit f pour tout $x \in]0, +\infty[$. On procédant de la même manière (mais en intégrant trois fois par partie pour $0 < x \leq 1$) on montre que la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ est aussi uniformément intégrable ce qui montre que $f \in C^1(]0, +\infty[)$.

Finalement, pour montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \equiv I$, on utilise de nouveau une intégration par partie pour montrer que

$$I - f(x) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx} - txe^{-tx}) \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

Pour tout $x > 0$ et $t \geq 0$ on a que $0 \leq 1 - e^{-tx} - txe^{-tx} \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{2}t^2x^2 \right\}$ ainsi que $0 \leq 1 - \cos(t) \leq 2$ et donc

$$\begin{aligned} |I - f(x)| &= \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx} - txe^{-tx}) \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt \\ &= \int_0^{1/x} (1 - e^{-tx} - txe^{-tx}) \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt \\ &\quad + \int_{1/x}^{+\infty} (1 - e^{-tx} - txe^{-tx}) \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt \\ &\leq \int_0^{1/x} x^2 dt + \int_{1/x}^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt \leq 3x. \end{aligned}$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $0 < x \leq \delta$ implique $|I - f(x)| \leq \varepsilon$, ce qui par définition veut dire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I$.

iii) Par le résultats du point ii) on peut dériver sous l'intégrale et on obtient que

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt.$$

En intégrant deux fois par partie, nous trouvons que $f'(x) = -1 - x^2 f'(x)$, c'est-à-dire $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$, et par conséquent $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x > 0, f(x) = -\arctan(x) + c$.

iv) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a pour $x > 0$,

$$f(x)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-2xt} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^2 dt \right) = \frac{1}{2x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^2 dt,$$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et donc, $f(x) = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}$ et $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Nous avons donc montré qu'au sens d'une intégrale de Riemann généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Analyse avancée II – Corrigé de la série 10A

Échauffement.

En appliquant directement la définition vue au cours on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos(\varphi), t \sin(\varphi)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos(\varphi)^2 t \sin(\varphi) - 0}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)) = \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Les figures ci-dessous montrent le graphe de f (Fig. 1) et celui de la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(0,0)$ en fonction de l'angle φ qui détermine la direction autour de l'origine (Fig. 2).

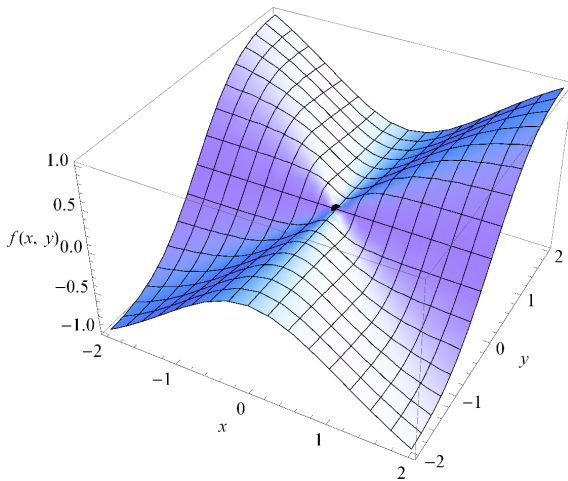


Fig. 1

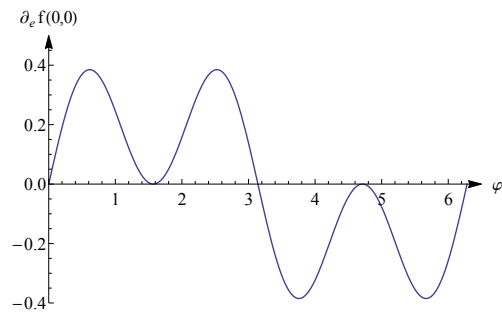


Fig. 2

Exercice 1.

Rappel: Pour un vecteur unitaire \mathbf{e} , la dérivée directionnelle d'une fonction f de classe C^1 au point p_0 suivant un vecteur \mathbf{e} est donnée par $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \mathbf{e}$.

i) Observons qu'on a

$$f(x, y) = f_1(x, y) f_2(x, y), \quad \text{avec} \quad f_1(x, y) = (x - 2y)^2 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

Ainsi on peut utiliser le résultat de l'Exercice 1, *ii)* de la Série 7 pour calculer $\nabla f(p_0)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} f_1(p_0) &= 1, & \nabla f_1(x, y) &= 2(x - 2y) (1, -2)^T \Rightarrow \nabla f_1(p_0) = (-2, 4)^T, \\ f_2(p_0) &= \ln(3), & \nabla f_2(x, y) &= \frac{1}{1 + x^2 + y^2} (2x, 2y)^T \Rightarrow \nabla f_2(p_0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, \end{aligned}$$

et donc (noter que $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(p_0) &= [f_2(p_0)\nabla f_1(p_0) + f_1(p_0)\nabla f_2(p_0)] \cdot \mathbf{e} \\ &= \left[\ln(3)(-2, 4)^T + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T \\ &= \frac{2(3\ln(3) + 1)}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

ii) Pour la fonction g on va utiliser le résultat de l'Exercice 1, iii) de la Série 7 puisqu'on a

$$g(x, y) = \frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}, \quad \text{avec } g_1(x, y) = e^{2x(y+1)} \quad \text{et } g_2(x, y) = 3 + x^2y^4.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} g_1(p_0) &= e^4, & \nabla g_1(x, y) &= e^{2x(y+1)}(2y+2, 2x)^T \Rightarrow \nabla g_1(p_0) = e^4(4, 2)^T, \\ g_2(p_0) &= 4, & \nabla g_2(x, y) &= (2xy^4, 4x^2y^3)^T \Rightarrow \nabla g_2(p_0) = (2, 4)^T, \end{aligned}$$

pour obtenir finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{e}}(p_0) &= \left[\frac{1}{g_2(p_0)} \cdot \nabla g_1(p_0) - \frac{g_1(p_0)}{g_2(p_0)^2} \cdot \nabla g_2(p_0) \right] \cdot \mathbf{e} \\ &= \left[\frac{e^4}{4}(4, 2)^T - \frac{e^4}{16}(2, 4)^T \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T = \frac{11e^4}{8\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

On commence par étudier la continuité de f en $(0, 0)$. Comme on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0),$$

f n'est pas continue en $(0, 0)$. Ainsi f n'est pas différentiable en ce point et on doit appliquer la définition pour calculer la dérivée directionnelle. Soit $\mathbf{e} = (u, v)^T$ un vecteur unitaire. Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu, 0 + tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{tut^2v^2}{t^2u^2 + t^4v^4} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{uv^2}{u^2 + t^2v^4} = \begin{cases} \frac{v^2}{u}, & u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'existence des dérivées directionnelles en un point dans toutes les directions n'est donc pas suffisante pour qu'une fonction soit continue et à fortiori différentiable en ce point!

Exercice 3.

- i) Pour une fonction f de classe C^1 , la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(p_0)$ au point p_0 suivant le vecteur (unitaire) \mathbf{e} est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \mathbf{e}.$$

La fonction f donnée est bien C^1 . Puisque

$$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T \quad \text{et} \quad \nabla f(1, -1, 2) = (-2, 2, -1)^T,$$

on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(1, -1, 2) = (-2, 2, -1)^T \cdot \frac{1}{3}(2, -1, 2)^T = -\frac{8}{3}.$$

- ii) La pente de f en p_0 dans le sens du vecteur unitaire \mathbf{u} est donnée par la dérivée directionnelle suivant ce vecteur unitaire (voir § 7.1), c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(p_0) &= \nabla f(p_0) \cdot \mathbf{u} = (-2, 2, -1)^T \cdot (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta))^T \\ &= 2 \sin(\theta) (\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) - \cos(\theta) =: g(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

où $g : [0, \pi] \times [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- iii) On sait du cours (§ 7.2.2) qu'en un point où f est différentiable, la pente de la tangente au graphe est maximale (minimale) dans le sens du gradient (opposée au gradient) et qu'elle est égale à (l'opposée de) la norme du gradient. Au point $p_0 = (1, -1, 2)$, la pente maximale (minimale) vaut donc

$$\|\nabla f(1, -1, 2)\| = 3 \quad (-\|\nabla f(1, -1, 2)\| = -3).$$

Les directions correspondantes sont $\pm \frac{\nabla f(1, -1, 2)}{\|\nabla f(1, -1, 2)\|} = \pm \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$. Pour trouver les angles (θ, φ) donnant lieu à ces directions, on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp \frac{2}{3} \\ \pm \frac{2}{3} \\ \mp \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \theta = \arccos\left(\mp \frac{1}{3}\right) &\Rightarrow \sin(\theta) = \sqrt{1 - \left(\mp \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\varphi) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\varphi) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} \\ \frac{7\pi}{4} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{argmax} g(\theta, \varphi) = \left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right), \frac{3\pi}{4}\right) \\ \operatorname{argmin} g(\theta, \varphi) = \left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right), \frac{7\pi}{4}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

La pente de f en p_0 est donc maximale pour les angles $(\theta, \varphi) = \left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right), \frac{3\pi}{4}\right)$ et minimale pour $(\theta, \varphi) = \left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right), \frac{7\pi}{4}\right)$.

Exercice 4.

Les développements limités d'ordre n pour une fonction de trois variables s'obtiennent de la formule donnée au cours.

Dans la suite on pose $p_0 := (x_0, y_0, z_0)$ pour simplifier la notation.

i) Le développement linéaire de la fonction $f(x, y, z)$ au voisinage de p_0 est

$$f(x, y, z) = f(p_0) + f_x(p_0)(x - x_0) + f_y(p_0)(y - y_0) + f_z(p_0)(z - z_0) + d \cdot \varepsilon(x, y, z),$$

où $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, et la notation $\varepsilon(x, y, z)$ signifie comme toujours que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow p_0} \varepsilon(x, y, z) = 0$.

ii) Pour le développement limité d'ordre 2 on obtient

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(p_0) + f_x(p_0)(x - x_0) + f_y(p_0)(y - y_0) + f_z(p_0)(z - z_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(p_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(p_0)(y - y_0)^2 + \frac{1}{2}f_{zz}(p_0)(z - z_0)^2 \\ &\quad + f_{xy}(p_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{xz}(p_0)(x - x_0)(z - z_0) + f_{yz}(p_0)(y - y_0)(z - z_0) \\ &\quad + d^2\varepsilon(x, y, z), \end{aligned}$$

où d est définie comme ci-dessus, et $\lim_{(x,y,z) \rightarrow p_0} \varepsilon(x, y, z) = 0$.

Exercice 5.

i) Le polynôme de Taylor $p_2(x, y)$ d'ordre 2 d'une fonction $f(x, y)$ au voisinage de l'origine est donné par

$$p_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2.$$

Ici on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1, \\ f_x(x, y) &= 2xy + 2y - 5, & f_y(x, y) &= x^2 + 2x + 6y, \\ f_{xx}(x, y) &= 2y, & f_{xy}(x, y) &= 2x + 2, & f_{yy}(x, y) &= 6, \end{aligned}$$

d'où

$$f(0, 0) = 1, \quad f_x(0, 0) = -5, \quad f_y(0, 0) = 0, \quad f_{xx}(0, 0) = 0, \quad f_{xy}(0, 0) = 2, \quad f_{yy}(0, 0) = 6,$$

et donc

$$p_2(x, y) = 1 + (-5) \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot y^2 = 1 - 5x + 2xy + 3y^2.$$

ii) Comme on a vu à l'Exercice 4, ii), le polynôme de Taylor $p_2(x, y, z)$ d'ordre 2 d'une fonction $f(x, y, z)$ de trois variables autour de l'origine est donné par

$$\begin{aligned} p_2(x, y, z) &= f(0, 0, 0) + f_x(0, 0, 0)x + f_y(0, 0, 0)y + f_z(0, 0, 0)z + \\ &\quad \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0, 0)x^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0, 0)y^2 + \frac{1}{2}f_{zz}(0, 0, 0)z^2 + \\ &\quad f_{xy}(0, 0, 0)xy + f_{xz}(0, 0, 0)xz + f_{yz}(0, 0, 0)yz \end{aligned}$$

Ici on a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= e^x + y \sinh(z), \\ f_x(x, y, z) &= e^x, & f_y(x, y, z) &= \sinh(z), & f_z(x, y, z) &= y \cosh(z), \\ f_{xx}(x, y, z) &= e^x, & f_{yy}(x, y, z) &= 0, & f_{zz}(x, y, z) &= y \sinh(z), \\ f_{xy}(x, y, z) &= 0, & f_{xz}(x, y, z) &= 0, & f_{yz}(x, y, z) &= \cosh(z), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f(0,0,0) = 1, \quad f_x(0,0,0) = 1, \quad f_y(0,0,0) = 0, \quad f_z(0,0,0) = 0, \quad f_{xx}(0,0,0) = 1, \\ f_{yy}(0,0,0) = 0, \quad f_{zz}(0,0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0,0) = 0 = f_{xz}(0,0,0), \quad f_{yz}(0,0,0) = 1, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} p_2(x,y,z) &= 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot y^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot z^2 + \\ &\quad 0 \cdot xy + 0 \cdot xz + 1 \cdot yz \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + yz. \end{aligned}$$

iii) Le polynôme de Taylor $p_1(x,y)$ d'ordre 1 de $f(x,y)$ au voisinage de $(1, -2)$ est donné par

$$p_1(x,y) = f(1, -2) + f_x(1, -2)(x - 1) + f_y(1, -2)(y + 2).$$

Comme

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3xy + x^2 - y + 5x - 3, \\ f_x(x,y) &= 3y + 2x + 5, \quad f_y(x,y) = 3x - 1, \end{aligned}$$

et donc

$$f(1, -2) = -1, \quad f_x(1, -2) = 1, \quad f_y(1, -2) = 2.$$

Ainsi

$$p_1(x,y) = -1 + (x - 1) + 2(y + 2) = x + 2y + 2.$$

iv) On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\cos(x))^{\frac{1}{2} + \sin(y)} = \exp\left(\left(\frac{1}{2} + \sin(y)\right) \ln(\cos(x))\right), \\ f_x(x,y) &= -\left(\frac{1}{2} + \sin(y)\right) (\cos(x))^{\sin(y) - \frac{1}{2}} \sin(x), \\ f_y(x,y) &= \ln(\cos(x)) (\cos(x))^{\frac{1}{2} + \sin(y)} \cos(y), \end{aligned}$$

d'où

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad f_x\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_y\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \ln(2).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p_1(x,y) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \ln(2) \left(y - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{24} (\ln(2) + 4) - \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{4} \ln(2) y. \end{aligned}$$

Pour $i)$, l'erreur $d^2 \cdot \varepsilon(x,y)$ doit satisfaire $\lim_{d \rightarrow 0} \varepsilon(x,y) = 0$, où $d = \|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ici on a

$$d^2 \cdot \varepsilon(x,y) = f(x,y) - p_2(x,y) = x^2y + 2xy + 3y^2 - 5x + 1 - (1 - 5x + 2xy + 3y^2) = x^2y$$

et donc, en utilisant les coordonnées polaires $x = d \cos(\varphi)$, $y = d \sin(\varphi)$,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \varepsilon(x, y) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{(d \cos(\varphi))^2 (d \sin(\varphi))}{d^2} = \lim_{d \rightarrow 0} d \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi) = 0,$$

puisque $|\cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)| \leq 1$ uniformément en $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Exercice 6.

i) Méthode 1: Les dérivées partielles de la fonction $f(x, y, z)$ sont

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= 2z e^{2xz+y}, & f_y(x, y, z) &= e^{2xz+y}, & f_z(x, y, z) &= 2x e^{2xz+y} \\ f_{xx}(x, y, z) &= 4z^2 e^{2xz+y}, & f_{yy}(x, y, z) &= e^{2xz+y}, & f_z(x, y, z) &= 4x^2 e^{2xz+y} \\ f_{xy}(x, y, z) &= 2z e^{2xz+y}, & f_{xz}(x, y, z) &= (2 + 4xz) e^{2xz+y}, & f_{yz}(x, y, z) &= 2x e^{2xz+y} \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} f_x(0, 0, 0) &= 0, & f_y(0, 0, 0) &= 1, & f_z(0, 0, 0) &= 0 \\ f_{xx}(0, 0, 0) &= 0, & f_{yy}(0, 0, 0) &= 1, & f_z(0, 0, 0) &= 0 \\ f_{xy}(0, 0, 0) &= 0, & f_{xz}(0, 0, 0) &= 2, & f_{yz}(0, 0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme de Taylor $p_2(x, y, z)$ d'ordre 2 est

$$p_2(x, y, z) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + 2xz.$$

Méthode 2: On a $f(x, y, z) = g(h(x, y, z))$ avec $g(u) = e^u$ et $h(x, y, z) = 2xz + y$. Puisque $h(0, 0, 0) = 0$, on doit utiliser le développement limité (DL) de g en $u = 0$, c'est-à-dire

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2 \tilde{\varepsilon}(u),$$

avec $\lim_{u \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}(u) = 0$. On remplace $u = 2xz + y$:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 1 + 2xz + y + \frac{(2xz + y)^2}{2} + (2xz + y)^2 \tilde{\varepsilon}(2xz + y) \\ &= 1 + 2xz + y + \frac{y^2}{2} + 2x^2 z^2 + 2xyz + (2xz + y)^2 \tilde{\varepsilon}(2xz + y) \\ &= 1 + 2xz + y + \frac{y^2}{2} + d^2 \varepsilon(x, y, z), \end{aligned}$$

avec $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et

$$\varepsilon(x, y, z) = \frac{2x^2 z^2 + 2xyz + (2xz + y)^2 \tilde{\varepsilon}(2xz + y)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Les termes $2x^2 z^2$ et $2xyz$ ont été mis dans le reste car ils sont d'ordre supérieur à 2 (4 et 3 dans ce cas). On vérifie que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \varepsilon(x, y, z) = 0$. En utilisant les coordonnées sphériques on vérifie facilement que

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \frac{2x^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 0, \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \frac{2xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

et $|(2xz + y)^2 / (x^2 + y^2 + z^2)| < C$ pour tout (x, y, z) , avec $C > 0$ une constante. Il s'ensuit

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \left| \frac{(2xz + y)^2 \tilde{\varepsilon}(2xz + y)}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} C |\tilde{\varepsilon}(2xz + y)| = 0,$$

vu que $\lim_{u \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}(u) = 0$. On a donc bien trouvé $\lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \varepsilon(x, y, z) = 0$ et donc

$$p_2(x, y, z) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + 2xz.$$

ii) Méthode 1: Les dérivées partielles de f sont

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2 \cos(2x + y^2), & f_y(x, y) &= 2y \cos(2x + y^2), \\ f_{xx}(x, y) &= -4 \sin(2x + y^2), & f_{yy}(x, y) &= 2 \cos(2x + y^2) - 4y^2 \sin(2x + y^2), \\ f_{xy}(x, y) &= -4y \sin(2x + y^2) \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} f_x(1, 1) &= 2 \cos(3), & f_y(1, 1) &= 2 \cos(3), \\ f_{xx}(1, 1) &= -4 \sin(3), & f_{yy}(1, 1) &= 2 \cos(3) - 4 \sin(3), & f_{xy}(1, 1) &= -4 \sin(3). \end{aligned}$$

Par la formule du cours on a alors pour le polynôme de Taylor $p_2(x, y)$ d'ordre 2

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= \sin(3) + 2 \cos(3) (x - 1) + 2 \cos(3) (y - 1) + \frac{1}{2} (-4 \sin(3)) (x - 1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (2 \cos(3) - 4 \sin(3)) (y - 1)^2 + (-4 \sin(3)) (x - 1)(y - 1) \\ &= \sin(3) + 2 \cos(3) (x - 1) + 2 \cos(3) (y - 1) - 2 \sin(3) (x - 1)^2 \\ &\quad + (\cos(3) - 2 \sin(3)) (y - 1)^2 - 4 \sin(3) (x - 1)(y - 1) \end{aligned}$$

Méthode 2: On a $f(x, y) = g(l(x, y))$ avec $g(u) = \sin(u)$ et $l(x, y) = 2x + y^2$. Puisque $l(1, 1) = 3$, on doit utiliser le DL de g en $u = 3$, c'est-à-dire

$$\sin(u) = \sin(3) + \cos(3)(u - 3) - \frac{\sin(3)}{2}(u - 3)^2 + (u - 3)^2 \tilde{\varepsilon}(u)$$

avec $\lim_{u \rightarrow 3} \tilde{\varepsilon}(u) = 0$.

Comme on cherche le DL dans un point (x_0, y_0) non-nul, on doit explicitement écrire $x = x_0 + h = 1 + h$ et $y = y_0 + k = 1 + k$ avant de remplacer u :

$$u = l(x, y) = l(1 + h, 1 + k) = 2(1 + h) + (1 + k)^2 = 3 + 2h + 2k + k^2.$$

Avec ceci on obtient

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(3) + \cos(3)(2h + 2k + k^2) - \frac{\sin(3)}{2}(2h + 2k + k^2)^2 + (2h + 2k + k^2)^2 \tilde{\varepsilon}(l(x, y)) \\ &= \sin(3) + 2 \cos(3) h + 2 \cos(3) k + \cos(3) k^2 - \frac{\sin(3)}{2}(4h^2 + 8hk + 4k^2) + d^2 \varepsilon(x, y) \\ &= \sin(3) + 2 \cos(3) h + 2 \cos(3) k - 2 \sin(3) h^2 + (\cos(3) - 2 \sin(3)) k^2 \\ &\quad - 4 \sin(3) h k + d^2 \varepsilon(x, y), \end{aligned}$$

où $d = \sqrt{h^2 + k^2}$ et ε est défini de manière similaire à l'exercice précédent, est à dire qu'il contient $\tilde{\varepsilon}$ et les termes d'ordre supérieur.

Ce résultat correspond bien à celui obtenu par la méthode 1.

Exercice 7. Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$

On calcule la dérivée partielle concernée. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Remarque: Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-5y^4(x^4 + y^4) - 4y^3(x^5 - y^5)}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{-y^8 - 5y^4x^4 - 4y^3x^5}{(x^4 + y^4)^2}$$

et il est facile à montrer (en passant en coordonnées polaires par exemple) que la limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

n'existe pas.

Exercice 8.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2|y|}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

On a $|f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))| < r$ ce qui implique que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

et f (Fig. 3) est donc continue en $(0, 0)$. Pour les dérivées partielles on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \cdot |0|}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^2 \cdot |h|}{h^2} - 0}{h} = 0$$

et pour les dérivées directionnelles selon un vecteur $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(v_1^2 t^2) |v_2| |t|}{(v_1^2 + v_2^2) t^2} - 0}{t} = \frac{v_1^2 |v_2|}{v_1^2 + v_2^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t}.$$

La dérivée directionnelle n'est donc pas définie si $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$. La dérivée directionnelle unilatérale est par contre définie et on a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_+}(0, 0) = \frac{v_1^2 |v_2|}{v_1^2 + v_2^2} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{|t|}{t} = \frac{v_1^2 |v_2|}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Une fonction qui satisfait aux critères ne peut pas être différentiable en $(0, 0)$, car une fonction différentiable possède des dérivées directionnelles selon tout vecteur $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

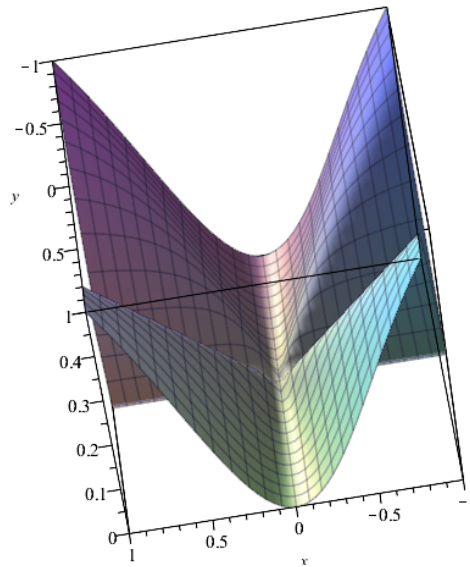


Fig. 3

Analyse avancée II – Corrigé de la série 10B

Echauffement. (Théorème de la fonction réciproque)

Pour l'énoncé voir le cours. la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est continûment différentiable, strictement monotone et surjective, mais ne satisfait pas les conditions du théorème sur \mathbb{R} , car $f'(0) = 0$.

Exercice 1. (Théorème de la fonction réciproque)

i) Pour la matrice jacobienne de F on a

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et pour le jacobien de F

$$\det(J_F(x, y)) = 4x^2 + 4y^2.$$

Il existe une fonction inverse dans un voisinage de tout point (x, y) tel que $\det(J_F(x, y)) \neq 0$. Ceci est le cas à l'exception de $(x, y) = (0, 0)$ et on a donc un inverse dans un voisinage du point $(x, y) = (1, 0)$.

ii) Non, parce que F n'est pas injective car, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(-x, -y) = F(x, y)$. En fait, si on pose

$$(\bar{x}, \bar{y}) = F(x, y),$$

on a en notation complexe, avec $z = x + iy$ et $\bar{z} = \bar{x} + i\bar{y}$, que $\bar{z} = z^2$ et z et $-z$ ont donc la même image. En pratique, pour étudier les applications du plan, il s'avère souvent avantageux de passer en notation complexe.

Exercice 2. (Théorème de la fonction réciproque)

Par définition de "difféomorphisme", les fonctions ϕ , ψ , ϕ^{-1} et ψ^{-1} sont toutes de classe C^1 sur leur domaine, et par conséquent on a que $\phi^{-1} \circ \psi^{-1} \in C^1(W, U)$. Il reste à montrer que $\phi^{-1} \circ \psi^{-1}$ est l'inverse de $\psi \circ \phi$. Par l'associativité de la composition des fonctions on a :

$$(\psi \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \psi^{-1}) = \psi \circ (\phi \circ \phi^{-1}) \circ \psi^{-1} = \psi \circ \text{Id} \circ \psi^{-1} = \text{Id},$$

ce qui montre que c'est un inverse à droite (et donc aussi un inverse à gauche et donc un inverse; voir le cours d'algèbre linéaire).

Exercice 3. (Théorème de la fonction réciproque)

D'après le théorème d'existence d'une fonction inverse locale, $g \in C^1(V, U)$ et on peut calculer sa dérivée g' en utilisant que sur V , $f \circ g = \text{Id}$, ce qui donne sur V (voir Analyse I),

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) g' = 1,$$

et donc

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

et en tant que composition de deux fonctions de classe C^1 , $g' \in C^1(V, U)$. Pour la fonction g'' on obtient sur V

$$g'' = \frac{-1}{(f' \circ g)^2} (f'' \circ g) g' = \frac{-1}{(f' \circ g)^3} (f'' \circ g).$$

Exercice 4. (Difféomorphisme et orientation)

- i)* Supposons l'existence de $x, y \in U$ tels que $\det(J_\psi)(x) < 0$ et $\det(J_\psi)(y) > 0$. Puisque U est supposé connexe par arc et $\det(J_\psi)$ est une fonction continue sur U , le théorème de la valeur intermédiaire (voir Analyse I) montre qu'il existe pour tout chemin continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ tel que $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$ un $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\det(J_\psi)(\gamma(t_0)) = 0$. Ceci est impossible puisque ψ est un difféomorphisme. Cette contradiction prouve le résultat.
- ii)* Un simple exemple en dimension $n = 1$ et le suivant : on choisit $U =]-4, -3[\cup]1, 2[$ et $V =]1, 2[\cup]3, 4[$ et définit le difféomorphisme $\psi: U \rightarrow V$ par $\psi(x) = |x|$. En effet, ψ satisfait $\forall x \in]-4, -3[$, $\det(J_\psi)(x) = \psi'(x) = -1$ et $\forall x \in]1, 2[$, $\det(J_\psi)(x) = \psi'(x) = 1$.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 11A

Échauffement.

On obtient les points stationnaires de la fonction f en résolvant le système

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_x(x, y) = 2x - 2 = 0 \\ f_y(x, y) = 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Le seul point stationnaire de f est donc $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Puisque

$$\Lambda_2(x, y) = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

et $\Lambda_1(x, y) = f_{xx}(x, y) = 2$, on a $\Lambda_2\left(1, \frac{1}{2}\right) > 0$ et $\Lambda_1\left(1, \frac{1}{2}\right) > 0$ et la fonction f atteint donc un minimum local au point $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ où elle vaut $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ (Fig. 1).

Exercice 1.

Pour les cas $i) - iv)$ on peut utiliser la matrice hessienne H en $(0, 0)$ qui est diagonale. On a :

$i)$ $\det H = 2^2 > 0$ et $H_{11} = 2 > 0 \Rightarrow$ le point $(0, 0)$ est un minimum (en fait global);

$ii)$ $\det H = 2 \cdot (-2) < 0 \Rightarrow$ il s'agit d'un point selle;

$iii)$ $\det H = (-2) \cdot 2 < 0 \Rightarrow$ il s'agit d'un point selle;

$iv)$ $\det H = (-2)^2 > 0$ et $H_{11} = -2 < 0 \Rightarrow$ le point $(0, 0)$ est un maximum (en fait global).

Pour les cas $v) - viii)$ on ne peut pas utiliser la matrice hessienne parce que celle-ci est nulle.

$v)$ Comme $f(x, y) = x^4 + y^4 > 0 = f(0, 0)$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, le point $(0, 0)$ est le minimum global.

$vi)$ Soit $\varepsilon > 0$. Alors $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^4 > 0 = f(0, 0) > f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^4$, donc $(0, 0)$ est un point selle.

$vii)$ Aussi un point selle: $f(\varepsilon, 0) = -\varepsilon^4 < 0 = f(0, 0) < f(0, \varepsilon) = \varepsilon^4$ pour tout $\varepsilon > 0$.

$viii)$ $f(x, y) = -(x^4 + y^4) < 0$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, donc $(0, 0)$ est le maximum global de f .

Exercice 2.

$i)$ Comme la matrice A est symétrique, il existe une matrice orthogonale V de vecteurs propres de A telle que $A = VDVT^T$, où D est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de A . On a

$$\det(A - \lambda I) = (6 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 7 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2.$$

Les vecteurs propres satisfont alors

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6v_{11} - 2v_{21} = \lambda_1 v_{11} \\ -2v_{11} + 3v_{21} = \lambda_1 v_{21} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6v_{12} - 2v_{22} = \lambda_2 v_{12} \\ -2v_{12} + 3v_{22} = \lambda_2 v_{22} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour construire la matrice orthogonale V il faut normer les vecteurs propres. Comme $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{5}$, on a $V = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ et donc

$$A = VDV^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

ii) Le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de (x_0, y_0) est, en écrivant $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(d^2), \quad d = \sqrt{h^2 + k^2}.$$

Comme la matrice hessienne $H := H_f(x_0, y_0)$ est symétrique, on peut la diagonaliser comme $H = UDU^T$, où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et les colonnes de U sont les vecteurs propres normés de H . Ainsi

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} UDU^T \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(d^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{h} & \bar{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{h} \\ \bar{k} \end{pmatrix} + d^2 \cdot \varepsilon(x, y) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_1 \bar{h}^2 + \lambda_2 \bar{k}^2) + o(d^2) \end{aligned}$$

où $\begin{pmatrix} \bar{h} \\ \bar{k} \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. Dans la suite, on va négliger l'erreur parce qu'on peut la rendre arbitrairement petit en considérant un voisinage adéquat.

- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, on a $\lambda_1 \bar{h}^2 + \lambda_2 \bar{k}^2 \geq 0$. Ainsi $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ pour tout (x, y) dans un voisinage de (x_0, y_0) et (x_0, y_0) est un minimum local.
- Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, on a $\lambda_1 \bar{h}^2 + \lambda_2 \bar{k}^2 \leq 0$. Ainsi $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pour tout (x, y) dans un voisinage de (x_0, y_0) et (x_0, y_0) est un maximum local.
- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ (par exemple, l'autre cas est très similaire), on a $\lambda_1 \bar{h}^2 \geq 0$ et $\lambda_2 \bar{k}^2 \leq 0$. Ainsi $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ si $\bar{k} = 0$ et $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ si $\bar{h} = 0$. Plus précisément, en définissant

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0,$$

on peut dans tout voisinage de (x_0, y_0) trouver des points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) tels que $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2)$. Ainsi (x_0, y_0) est un point selle (cf. définition du cours).

iii) L'unique point stationnaire de f est $(0, 0)$ et on a $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ qui a les valeurs propres $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -4$. La matrice des vecteurs propres correspondants est

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Il suit que

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (4\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2) = 2 \left(\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) = (x+y)^2 - (x-y)^2$$

et à partir de cette expression, il est facile à voir que $(0, 0)$ est un point selle de f (en fait, $f(x, y) = g(x+y, x-y)$ où $g(u, v) = u^2 - v^2$, voir cas *ii*) de l'Ex. 7).

Exercice 3.

i) Le système

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -\sin(x) = 0 \\ f_y(x, y) = 6y = 0 \end{cases}$$

donne les point stationnaires $(x, y) = (k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Puisque

$$\Lambda_2(x, y) = \det \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = -6 \cos(x),$$

on a

$$\Lambda_2(k\pi, 0) = \begin{cases} -6, & k \text{ pair} \\ 6, & k \text{ impair} \end{cases}$$

Les points $(k\pi, 0)$ avec k pair sont donc des points selle avec $f(k\pi, 0) = 3$ tandis que pour k impair, l'égalité $\Lambda_1(k\pi, 0) = -\cos(k\pi) = 1 > 0$ implique que f admet des minimums locaux aux points $(k\pi, 0)$ avec $f(k\pi, 0) = 1$ (Fig. 2).

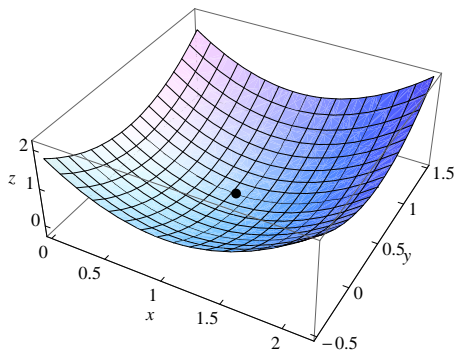


Fig. 1

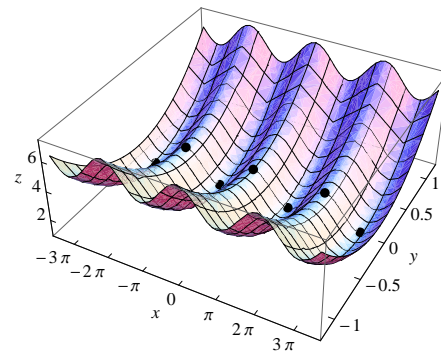


Fig. 2

ii) Comme

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + 2x + 2y = 0 \\ f_y(x, y) = -3y^2 + 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3(x^2 + y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (0, 0),$$

le seul point stationnaire de la fonction f est $(0, 0)$. Puisque

$$\Lambda_2(x, y) = \det \begin{pmatrix} 6x+2 & 2 \\ 2 & -6y+2 \end{pmatrix} = -36xy + 12x - 12y,$$

on a $\Lambda_2(0, 0) = 0$ ce qui ne permet pas de conclure sur la nature du point stationnaire. Mais comme $f(x, -x) = 2x^3$ et $f(0, 0) = 0$, la fonction f prend dans tout voisinage de $(0, 0)$ des valeurs positives et négatives; elle admet donc un point selle en $(0, 0)$, cf. Fig. 3.

iii) On a

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -6x + y^2 = 0 \\ f_y(x, y) = 2y(x - 2y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0),$$

et donc le seul point stationnaire de la fonction f est $(0, 0)$. On trouve ensuite

$$\Lambda_2(x, y) = \det \begin{pmatrix} -6 & 2y \\ 2y & 2x - 12y^2 \end{pmatrix} = 68y^2 - 12x, \quad \text{d'où } \Lambda_2(0, 0) = 0.$$

En isolant un carré parfait dans $f(x, y)$, on obtient

$$f(x, y) = -3 \left(x - \frac{y^2}{6} \right)^2 - \frac{11}{12} y^4 \quad \text{ou} \quad f(x, y) = -\frac{11}{4} x^2 - \left(y^2 - \frac{x}{2} \right)^2,$$

ce qui implique $f(x, y) \leq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f(0, 0) = 0$, la fonction f admet un maximum local en $(0, 0)$, cf. Fig. 4.

Remarque: Puisque $f(x, y) = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$, le maximum de f en $(0, 0)$ est absolu.

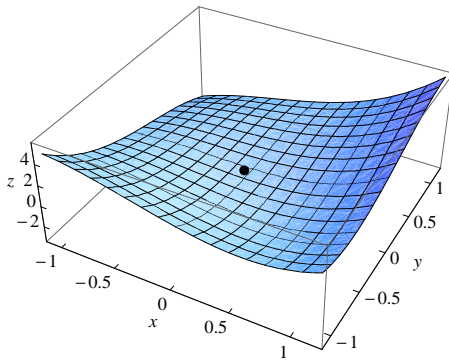


Fig. 3

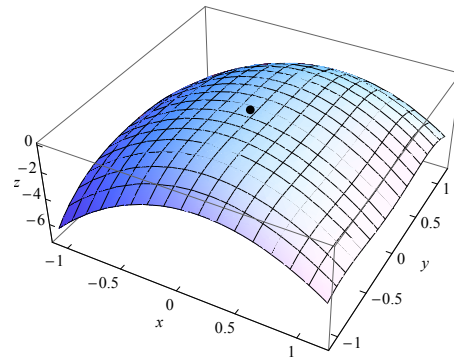


Fig. 4

Exercice 4.

i) On résout le système

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = -4x + 4y = 0 \\ f_y(x, y, z) = 4x - 10y + 2z = 0 \\ f_z(x, y, z) = 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

pour obtenir le seul point stationnaire $(0, 0, 0)$. Ensuite on calcule le hessien et les mineurs principaux dominants de la matrice hessienne:

$$\Lambda_3(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -10 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \Lambda_1(x, y, z) = -4.$$

En $(0, 0, 0)$ on a

$$\Lambda_1(0, 0, 0) = -4 < 0, \quad \Lambda_2(0, 0, 0) = 24 > 0 \quad \text{et} \quad \Lambda_3(0, 0, 0) = -32 < 0,$$

et donc la fonction f admet un maximum local en $(0, 0, 0)$ et $f(0, 0, 0) = 2$.

ii) Pour trouver les points stationnaire, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 4x - 3z^2 = 0 \\ f_y(x, y, z) = 3y^2 - 3 = 0 \\ f_z(x, y, z) = -6xz + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3z^2 = 0 \\ 3(y^2 - 1) = 0 \\ -6z(x - 1) = 0 \end{cases}$$

Donc $y = \pm 1$ et soit $z = 0$ (ce qui implique $x = 0$), soit $x = 1$ (ce qui implique $z = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$).
Les points stationnaires de f sont alors

$$(0, 1, 0), \quad (0, -1, 0), \quad \left(1, 1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(1, -1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(1, 1, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{et} \quad \left(1, -1, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Ensuite on a

$$\Lambda_3(x, y, z) = \det H_f(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6z \\ 0 & 6y & 0 \\ -6z & 0 & -6(x-1) \end{pmatrix} = -72y(2(x-1) + 3z^2),$$

$$\Lambda_2(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} = 24y \quad \text{et} \quad \Lambda_1(x, y, z) = 4.$$

Évaluées aux points stationnaires ces expressions valent

$\Lambda_3(0, 1, 0) = 144 > 0,$	$\Lambda_2(0, 1, 0) = 24 > 0$
$\Lambda_3(0, -1, 0) = -144 < 0,$	$\Lambda_2(0, -1, 0) = -24 < 0$
$\Lambda_3\left(1, 1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -288 < 0,$	$\Lambda_2\left(1, 1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 24 > 0$
$\Lambda_3\left(1, -1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 288 > 0,$	$\Lambda_2\left(1, -1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -24 < 0$
$\Lambda_3\left(1, 1, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -288 < 0,$	$\Lambda_2\left(1, 1, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 24 > 0$
$\Lambda_3\left(1, -1, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 288 > 0,$	$\Lambda_2\left(1, -1, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -24 < 0$

Comme $\Lambda_1 > 0$, f a un minimum local en $(0, 1, 0)$ où $f(0, 1, 0) = 2$, et tous les autres points stationnaires sont des points selle (voir schéma du cours).

Exercice 5.

i) Comme la fonction f admet des dérivées partielles partout à l'intérieur du domaine D , ses extremums absolus se trouvent parmi les points stationnaires à l'intérieur ou sur le bord de D .

Points stationnaires à l'intérieur de D :

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x - y - 1 = 0 \\ f_y(x, y) = -x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 1).$$

Puisque

$$\Lambda_2(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0 \quad \text{et} \quad \Lambda_1(x, y) = 2 > 0,$$

le point $(1, 1)$ est un minimum local de f . De plus on a $f(1, 1) = -1$.

Sur le bord de D on a:

Notons d'abord que le bord de D est l'union des trois sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 .

$$\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 3\} \cup \{(0, y) : 0 \leq y \leq 3\} \cup \{(x, 3-x) : 0 \leq x \leq 3\}.$$

L'évaluation de la fonction f sur le bord donne

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 3, \\ f(0, y) &= y^2 - y = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, & 0 \leq y \leq 3, \\ f(x, 3-x) &= 3(x^2 - 3x + 2) = 3 \left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right], & 0 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

L'idée est maintenant de chercher les extremums de ces fonctions unidimensionnelles dans le domaine précisé qui se trouvent soit aux points stationnaires soit aux extrémités du domaine (cf. Analyse I). Notons d'abord $g(x) = f(x, 0)$. Alors $g'(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Puisque $g''(x) = 2 > 0$, g a un minimum local en $x = \frac{1}{2}$. De plus on a $g(0) = 0$ et $g(3) = 6$. On a donc

$$\max_{0 \leq x \leq 3} f(x, 0) = f(3, 0) = 6 \quad \text{et} \quad \min_{0 \leq x \leq 3} f(x, 0) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

De même, on cherche les extremums des fonctions $h(y) = f(0, y)$ et $k(x) = f(x, 3-x)$. La fonction h a exactement le même comportement que g et pour k on a

$$\begin{aligned} k'(x) &= 6\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}, & k\left(\frac{3}{2}\right) &= -\frac{3}{4}, \\ k''(x) &= 6 > 0 \quad (\Rightarrow \text{minimum local}), & k(0) &= k(3) = 6, \end{aligned}$$

si bien qu'on obtient

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq y \leq 3} f(0, y) &= f(0, 3) = 6, & \min_{0 \leq y \leq 3} f(0, y) &= f\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \\ \max_{0 \leq x \leq 3} f(x, 3-x) &= f(3, 0) = f(0, 3) = 6, & \min_{0 \leq x \leq 3} f(x, 3-x) &= f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que f admet un minimum absolu en $(1, 1)$ de valeur $f(1, 1) = -1$ et des maximums absolus en $(3, 0)$ et en $(0, 3)$ de valeur $f(3, 0) = f(0, 3) = 6$, voir Fig. 5.

- ii) Comme f est de classe C^2 sur D , ses extremums absolus se trouvent soit en un point stationnaire à l'intérieur de D , soit sur le bord de D .

Points stationnaires à l'intérieur de D :

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x - y - 6 = 0 \\ f_y(x, y) = -x + 4y - 6 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (2, 2).$$

Puisque

$$\Lambda_2(x, y) = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 15 > 0 \quad \text{et} \quad \Lambda_1(x, y) = 4 > 0,$$

le point $(2, 2)$ est un minimum local de f . De plus on a $f(2, 2) = -12$.

Sur le bord de D on a:

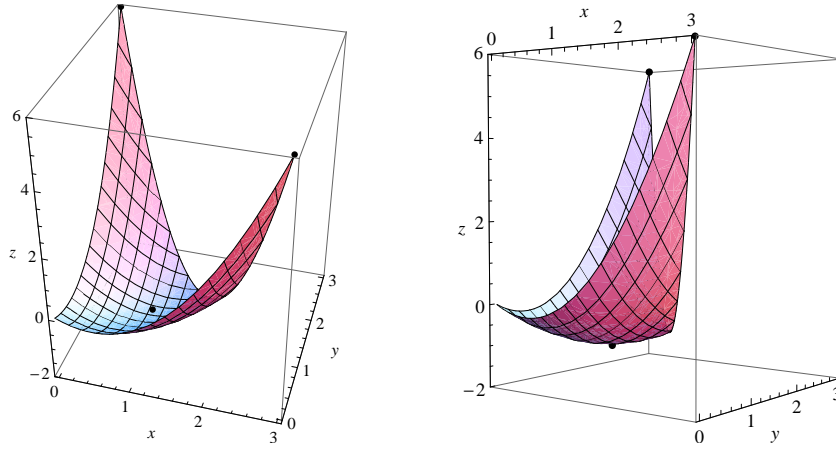


Fig. 5

Le bord de D est l'union des deux sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 :

$$\{(x, 0) : -4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}\} \cup \{(x, \sqrt{32-x^2}) : -4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}\}.$$

L'évaluation de la fonction f sur le bord donne

$$f(x, 0) = 2x^2 - 6x = 2 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}, \quad -4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2},$$

$$f(x, \sqrt{32-x^2}) = 64 - 6x - (x+6)\sqrt{32-x^2}, \quad -4\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}.$$

Sur la première partie du bord (le segment de l'axe x), f atteint son minimum en $x = \frac{3}{2}$ où $f(\frac{3}{2}, 0) = -\frac{9}{2}$ et son maximum en $x = -4\sqrt{2}$ où $f(-4\sqrt{2}, 0) = 8(8+3\sqrt{2})$. L'autre extrémité $x = 4\sqrt{2}$ n'est pas candidat pour le maximum global de f parce que $f(4\sqrt{2}) < f(-4\sqrt{2})$.

Pour la deuxième partie (le demi-cercle), soit $g: [-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 64 - 6x - (x+6)\sqrt{32-x^2}.$$

Alors g est dérivable sur $] -4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}[$, où sa dérivée vaut

$$g'(x) = -6 - \sqrt{32-x^2} + \frac{x(x+6)}{\sqrt{32-x^2}} = \frac{-6\sqrt{32-x^2} - 32 + 2x^2 + 6x}{\sqrt{32-x^2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow x^2 + 3x - 16 = 3\sqrt{32-x^2} \Rightarrow (x^2 + 3x - 16)^2 = 9(32-x^2) \\ &\Rightarrow x^4 + 6x^3 - 14x^2 - 96x - 32 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Par l'indication on sait que ce polynôme a des racines entières qui sont en fait $x_1 = 4$ et $x_2 = -4$ (trouvé en essayant). On a $g'(x_1) = 0$ et x_1 est donc un point stationnaire de g . (En fait, le polynôme (1) admet deux autres racines réelles mais celles-ci ainsi que x_2 ne sont pas des points stationnaires de g , ce sont des racines "artificielles" parce qu'on a pris le carré.)

La valeur de g en son point stationnaire est $g(4) = 0$. De plus, les points au bord de l'intervalle de définition de g sont aussi des candidats pour les extremums de g . On a $g(-4\sqrt{2}) = 64 + 24\sqrt{2} \approx 97.9$ et $g(4\sqrt{2}) = 64 - 24\sqrt{2} \approx 30.1$.

Ainsi le minimum global de f est atteint en $(2, 2)$ et vaut $f(2, 2) = -12$ et le maximum global est atteint en $(-4\sqrt{2}, 0)$ et vaut $f(-4\sqrt{2}, 0) = 8(8 + 3\sqrt{2})$.

Exercice 6.

Comme les dérivées partielles de f sont continues sur tout le domaine D , les extrema absolus sont atteints aux points stationnaires à l'intérieur ou sur le bord de D . Puisque $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ ne s'annule jamais sur D , la fonction f n'admet aucun point stationnaire.

Puisque le domaine D est un parallélépipède rectangle parallèle aux axes, on peut déterminer le comportement de f sur le bord de D en examinant ses dérivées partielles. Pour $(x, y, z) \in D$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ est croissante dans la direction } x \text{ et donc maximal en } x = a \text{ et minimal en } x = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ est décroissante dans la direction } y \text{ et donc maximal en } y = 0 \text{ et minimal en } y = b.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ est croissante dans la direction } z \text{ et donc maximal en } z = c \text{ et minimal en } z = 0.$$

La fonction f a donc son maximum absolu en $(a, 0, c)$ et son minimum absolu en $(0, b, 0)$.

Afin de calculer les valeurs extrémales de f , on doit trouver son expression. A partir des dérivées partielles données, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \partial_y f(x, y, z) = -1 &\Rightarrow f(x, y, z) = -y + g(x, z) &\Rightarrow \partial_x f(x, y, z) = \partial_x g(x, z) = z + 1 \\ &\Rightarrow g(x, z) = (z + 1)x + h(z) &\Rightarrow \partial_z f(x, y, z) = x + h'(z) = x + 2 \\ &\Rightarrow h(z) = 2z + C, \quad C \in \mathbb{R} &\Rightarrow g(x, z) = (z + 1)x + 2z + C \\ &\Rightarrow f(x, y, z) = -y + (z + 1)x + 2z + C \end{aligned}$$

La condition $f(0, 0, 0) = 3$ implique alors que $C = 3$ et $f(x, y, z) = (z + 1)x - y + 2z + 3$. Ainsi le maximum absolu de f est $f(a, 0, c) = a(c + 1) + 2c + 3$ et son minimum absolu est $f(0, b, 0) = 3 - b$.

Remarque: On aurait aussi pu calculer l'expression de f dès le départ mais l'approche prise ici est plus instructive.

Exercice 7.

Le gradient de g est

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} &= 2 \cos(\theta) (\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) + \sin(\theta) \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} &= 2 \sin(\theta) (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

Pour trouver les points stationnaires on distingue deux cas :

1) Si $\theta \in \{0, \pi\}$ on a $\sin(\theta) = 0$ et $\cos(\theta) \neq 0$, d'où $\sin(\varphi) = \cos(\varphi)$. Ainsi $\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{cases}$ ce qui mène aux points stationnaires

$$p_1 = (0, \frac{\pi}{4}), \quad p_2 = (0, \frac{5\pi}{4}), \quad p_3 = (\pi, \frac{\pi}{4}), \quad p_4 = (\pi, \frac{5\pi}{4}).$$

2) $\theta \in]0, \pi[$: Comme $\sin(\theta) \neq 0$ on a $\cos(\varphi) = -\sin(\varphi)$ et donc $\varphi = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} \\ \frac{7\pi}{4} \end{cases}$. La première équation devient alors

$$4 \underbrace{\sin(\varphi)}_{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}} + \tan(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = \mp 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \begin{cases} \arctan(-2\sqrt{2}) + \pi \\ \arctan(2\sqrt{2}) \end{cases}$$

Ainsi on a encore trouvé les deux points stationnaires

$$p_5 = \left(\arctan(-2\sqrt{2}) + \pi, \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{et} \quad p_6 = \left(\arctan(2\sqrt{2}), \frac{7\pi}{4} \right).$$

Pour déterminer la nature de tous les points stationnaires trouvés on calcule la matrice hessienne de g

$$H_g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - 2\sin(\theta)(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) & 2\cos(\theta)(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \\ 2\cos(\theta)(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) & 2\sin(\theta)(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

et son déterminant

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\theta, \varphi) &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) + 4\sin(\theta)^2(\cos(\varphi) - \sin(\varphi))^2 \\ &\quad - 4\cos(\theta)^2(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))^2 \\ &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) + 4\sin(\theta)^2 - 4\cos(\theta)^2 - 8\cos(\varphi)\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Pour tous les points du cas 1) on a $\Lambda_2(p_i) = -8 < 0$ ($i = 1, \dots, 4$), ce sont donc des points selle.

Comme

$$\tan(x)^2 = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)^2}{1 - \sin(x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x)^2 = \frac{\tan(x)^2}{1 + \tan(x)^2}$$

et de manière similaire

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{1 + \tan(x)^2},$$

on a pour les points du cas 2), p_5 et p_6 ,

$$\sin(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos(\theta) = \mp \frac{1}{3}, \quad \sin(\varphi) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(\varphi) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi on trouve $\Lambda_2(p_5) = \Lambda_2(p_6) = 8 > 0$ et comme $\Lambda_1(\theta, \varphi) = \cos(\theta) - 2\sin(\theta)(\sin(\varphi) - \cos(\varphi))$, on a $\Lambda_1(p_{5,6}) = \mp \frac{1}{3} \mp \frac{8}{3} = \mp 3$. La fonction g admet donc un maximum local en p_5 et un minimum local en p_6 . Les directions \mathbb{R}^3 qui y correspondent sont

$$\mathbf{u}_{p_5} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{p_6} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

En comparant avec l'Ex. 3 de la Série 10, on voit que le sens du vecteur \mathbf{u}_{p_5} qui maximise la pente g est celui du gradient de f au point concerné. Et le sens du vecteur \mathbf{u}_{p_6} de pente minimale est celui de $-\nabla f$.

Exercice 8.

Soit d la distance entre le point $P = (x, y)$ et la droite $x + y = a$ ($a > 0$). Puisque la distance entre un point et une droite est mesurée dans la direction perpendiculaire à la droite, le point $(x, y) + d \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ est sur la droite et vérifie donc

$$\left(x + \frac{d}{\sqrt{2}} \right) + \left(y + \frac{d}{\sqrt{2}} \right) = a \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - x - y).$$

Les distances de P aux droites $x = 0$ et $y = 0$ sont respectivement x et y . Par conséquent le produit des distances de P aux trois droites est donnée par la fonction

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} xy(a - x - y), \quad D(f) = \{(x, y) : x, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq a\}.$$

Comme on cherche P à l'intérieur du triangle ABC et que la fonction f admet des dérivées partielles en chaque point de $D(f)$, le maximum cherché est atteint en un point stationnaire de f à l'intérieur du domaine.

On résout donc le système

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ay - 2xy - y^2) = 0 & (1) \\ f_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ax - 2xy - x^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

en calculant d'abord $\sqrt{2} \cdot ((1) - (2))$:

$$x^2 - y^2 - a(x - y) = (x - y)(x + y - a) = 0 \quad \underset{x+y < a}{\Rightarrow} \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

En insérant $x = y$ dans (1), on obtient $ax - 3x^2 = x(a - 3x) = 0 \Rightarrow x = y = \frac{1}{3}a$ car on cherche un point à l'intérieur de $D(f)$ (i.e. $x > 0$).

Il reste à vérifier que f atteint un maximum au point $(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a)$. Le hessien de f est

$$\begin{aligned} \Lambda_2(x, y) &= \det \begin{pmatrix} -\sqrt{2}y & \frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(x + y) \\ \frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(x + y) & -\sqrt{2}x \end{pmatrix} = 2xy - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(x + y) \right)^2 \\ &= -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 2a(x + y) - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

et donc $\Lambda_2(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a) = \frac{1}{6}a^2 > 0$ et $\Lambda_1(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a) = -\frac{\sqrt{2}}{3}a < 0$.

La fonction f atteint donc son maximum au point $(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a)$ et on a $f(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a) = \frac{\sqrt{2}}{54}a^3$.

Analyse avancée II – Corrigé de la série 11B

Échauffement. (Théorème des fonctions implicites)

Voir le cours pour l'énoncé. Il faut un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tel que $F(x_0, y_0) = 0$ et $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$, ce qui garantit l'existence d'un voisinage U de x_0 et d'une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, telle que $f(x_0) = y_0$ et $\forall x \in U, F(x, f(x)) = 0$. Pour la dérivée de f on a $\forall x \in U$

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)).$$

Exercice 1. (Théorème des fonctions implicites)

i) Notons $\mathbf{y} = (y, z)$ et soit la fonction $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, \mathbf{y}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z))^{\top},$$

où $F_1(x, y, z) = x - y^3 + z + 8$ et $F_2(x, y, z) = x^3 + y^4 - z^5 - 16$.

Soit $(x_0, \mathbf{y}_0) = (0, 2, 0)$. Nous avons

$$F_1(0, 2, 0) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(0, 2, 0) = 0,$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y^2 & 1 \\ 4y^3 & -5z^4 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}\right)(0, 2, 0) = \det\begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 32 & 0 \end{pmatrix} = -32 \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites permet alors d'affirmer qu'il existe $\delta > 0$ et deux fonctions $f_1, f_2 \in C^1(]-\delta, +\delta[, \mathbb{R})$ telles que $f_1(0) = 2$ et $f_2(0) = 0$ et telles que $\forall x \in]-\delta, \delta[$,

$$\begin{aligned} F_1(x, f_1(x), f_2(x)) &= 0 \\ F_2(x, f_1(x), f_2(x)) &= 0 \end{aligned}$$

ii) Pour la dérivée de la fonction $f = (f_1, f_2)^{\top}$ on a (voir l'échauffement pour l'expression à calculer):

$$f'(0) = -\begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 32 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -32 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc $f_1'(0) = 0$ et $f_2'(0) = -1$. La tangente à la courbe $y = f_1(x)$ en 0 a donc donnée par l'équation $y = 2$ et la tangente à la courbe $z = f_2(x)$ en 0 et donnée par l'équation $z = -x$.

iii) Si on veut exprimer x et z en termes de y il faut contrôler le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x^2 & -5z^4 \end{pmatrix}$$

en $(0, 2, 0)$ et si on veut exprimer x et y en termes de z il faut contrôler le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3y^2 \\ 3x^2 & 4y^3 \end{pmatrix}$$

en $(0, 2, 0)$. Ces déterminants sont respectivement égal à 0 et $32 \neq 0$. On peut donc exprimer proche du point $(0, 2, 0)$ x et y en termes de z , mais pas x et z en termes de y .

Exercice 2. (Théorème des fonctions implicites)

i) Soit $D =]-1, +\infty[\times \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x, y, z) = -1 + x^2 + yz^5 + \arctan(xyz) + \frac{1}{2} \ln(1 + x + z) - \ln(3) - \ln(z) + \frac{1}{3} \ln(y^2 + z^3).$$

Alors, pour tout $(x, y, z) \in D$ on a

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 5yz^4 + \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2} + \frac{1}{2(1 + x + z)} - \frac{1}{z} + \frac{z^2}{y^2 + z^3}.$$

Ainsi, puisque $F(1, 0, 7) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 7) = \frac{1}{18} \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe $\delta > 0$ et une fonction de classe C^1 , $f : B((1, 0), \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$f(1, 0) = 7 \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in B((1, 0), \delta), \quad F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

ii) Pour tout $(x, y, z) \in D$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) &= 2x + \frac{yz}{1 + x^2y^2z^2} + \frac{1}{2(1 + x + z)} & \text{et} & \quad \frac{\partial F}{\partial x}(1, 0, 7) = 2 + \frac{1}{18}, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) &= z^5 + \frac{xz}{1 + x^2y^2z^2} + \frac{2y}{3(y^2 + z^3)} & \text{et} & \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0, 7) = 7^5 + 7. \end{aligned}$$

Le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(1, 0)$ correspond (localement) au plan tangent à la surface déterminée par l'équation $F(x, y, z) = 0$ au point $(1, 0, 7)$. Il est donc donné par:

$$\left\langle (\nabla F)(1, 0, 7), \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \\ z - 7 \end{pmatrix} \right\rangle = \left(2 + \frac{1}{18} \right) x + (7^5 + 7) y + \frac{1}{18} z - \frac{22}{9} = 0.$$

A noter que cette équation s'obtient aussi par le développement de Taylor à l'ordre 1 de f au point $(1, 0)$.

Exercice 3. (Théorème des fonctions implicites)

- i)* Manifestement on a $F(0,0) = 0$ et, puisque chaque composante de F est la somme de fonctions de classe C^1 , F est aussi de classe C^1 .
- ii)* Il suffit de vérifier le théorème des fonctions implicites. On a déjà vérifié que $F(0,0) = 0$ et il suffit donc de contrôler que le déterminant de la sous-matrice 2×2 de $F'(0)$ correspondant à la variable $u = (u_1, u_2)$ est non nul. On a, avec $w = (w_1, w_2)$

$$F'(u, w) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 1 & 2w_1 & 0 \\ e^{u_1} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 1 \\ e^{u_1} & 1 \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $\det \left(\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) \right) = -1 \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe donc $\varepsilon > 0$ et une fonction $f \in C^1(B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ telle que, pour tout $w \in B(0, \varepsilon)$

$$F(f(w), w) = 0.$$

iii) On a que

$$f'(0) = - \left(\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial w}(0,0) = - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analyse avancée II – Corrigé de la série 12A

Échauffement.

Comme dans l'exemple vu au cours, la surface du cylindre est $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ et son volume est $V = \pi r^2 h$. On veut donc maximiser la fonction $f(r, h) = \pi r^2 h$ sous la contrainte $g(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh - S = 0$.

Méthode 1: On utilise l'expression de S pour éliminer une des deux variables. En effet,

$$h(r) = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{S}{2\pi r} - r,$$

et donc

$$V(r) = f(r, h(r)) = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{S}{2} r - \pi r^3 \quad \Rightarrow \quad V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

et $V'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. Comme $V''(r) = -6\pi r < 0$, le cylindre ainsi obtenu a bien le volume maximal pour la surface donnée.

Méthode 2: Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction de Lagrange

$$F(r, h, \lambda) = f(r, h) - \lambda g(r, h) = \pi r^2 h - \lambda(2\pi r^2 + 2\pi rh - S)$$

et on cherche ses points stationnaires

$$\nabla F(r, h, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\pi rh - 4\pi\lambda r - 2\pi\lambda h \\ \pi r^2 - 2\pi\lambda r \\ 2\pi r^2 + 2\pi rh - S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} rh - 2\lambda r - \lambda h = 0 & (1) \\ r^2 - 2\lambda r = 0 & (2) \\ 2\pi r^2 + 2\pi rh - S = 0 & (3) \end{cases}$$

Comme $r > 0$, on a

$$(2) \Rightarrow \lambda = \frac{r}{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{rh}{2} - r^2 = 0 \Rightarrow h = 2r \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 6\pi r^2 = S \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Exercice 1.

- i) On cherche les extremums de la fonction-objectif $f(x, y) = x^3 + y^3$ sous la contrainte $g(x, y) = x^4 + y^4 - 32 = 0$. Notons que $\nabla g(x, y, z) = (4x^3, 4y^3) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0$ mais que $g(0, 0) \neq 0$ et donc $\nabla g(x, y) \neq 0$ pour tout (x, y) satisfaisant $g(x, y) = 0$.

La fonction de Lagrange est

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^3 + y^3 - \lambda(x^4 + y^4 - 32).$$

On cherche les points stationnaires de F qui sont solutions du système

$$\begin{cases} F_x = 3x^2 - 4\lambda x^3 = x^2(3 - 4\lambda x) = 0 & (1) \\ F_y = 3y^2 - 4\lambda y^3 = y^2(3 - 4\lambda y) = 0 & (2) \\ F_\lambda = -(x^4 + y^4 - 32) = 0 & (3) \end{cases}$$

A partir de (1) et (2) on trouve plusieurs solutions :

$$(1) \Rightarrow x = 0 \text{ ou } \lambda x = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad (2) \Rightarrow y = 0 \text{ ou } \lambda y = \frac{3}{4}$$

- Si $x = y = 0$, (3) n'est pas satisfaite, donc impossible.
- Si $x = 0$, alors (3) implique que $y = \pm\sqrt[4]{32} = \pm 2\sqrt[4]{2}$. Il existe alors une valeur de λ pour satisfaire (2).
- Si $y = 0$, alors $x = \pm 2\sqrt[4]{2}$ et (1) peut être satisfaite.
- Si aucune des variables n'est nulle, alors $x = y = \frac{3}{4\lambda}$ par (1) et (2). Par (3) il suit que $2\frac{81}{256\lambda^4} = 32 \Rightarrow x = y = \pm 2$.

Les solutions du système sont donc

$$(x, y) \in \left\{ (0, 2\sqrt[4]{2}), (0, -2\sqrt[4]{2}), (2\sqrt[4]{2}, 0), (-2\sqrt[4]{2}, 0), (2, 2), (-2, -2) \right\}$$

et on a le tableau suivant

(x, y)	$(0, 2\sqrt[4]{2})$	$(0, -2\sqrt[4]{2})$	$(2\sqrt[4]{2}, 0)$	$(-2\sqrt[4]{2}, 0)$	$(2, 2)$	$(-2, -2)$
$f(x, y)$	$8 \cdot 2^{3/4}$	$-8 \cdot 2^{3/4}$	$8 \cdot 2^{3/4}$	$-8 \cdot 2^{3/4}$	16	-16

Comme $2^{3/4} < 2$, la valeur maximale de f est 16, atteint en $(2, 2)$, et la valeur minimale est -16 , atteint en $(-2, -2)$.

- ii) On cherche les extremums de f sur l'ensemble $\Gamma := \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = 0 \text{ et } g_2(x, y, z) = 0\}$ avec $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $g_2(x, y, z) = x - y - 1$. Pour montrer que $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ et $\nabla g_2(x, y, z) = (1, -1, 0)$ sont linéairement indépendants sur Γ , supposons que $\alpha \nabla g_1(x, y, z) + \beta \nabla g_2(x, y, z) = 0$. Du système

$$\begin{cases} \alpha x + \beta = 0 \\ \alpha y - \beta = 0 \\ \alpha z = 0 \end{cases}$$

il suit que si $\alpha = 0$ alors $\beta = 0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $z = 0$ et la somme des deux premières équations donne $y = -x$. Observons $g_2(x, -x, 0) = 2x - 1 = 0$ implique $x = \frac{1}{2} = -y$ mais $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) \notin \Gamma$ à cause de g_1 . Ainsi ∇g_1 et ∇g_2 sont linéairement indépendants sur Γ .

La fonction de Lagrange est

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda, \mu) &= f(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z) \\ &= x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x - y - 1). \end{aligned}$$

et on résout le système $\nabla F = 0$:

$$\begin{cases} F_x = 1 - 2\lambda x - \mu = 0 & (1) \\ F_y = 1 - 2\lambda y + \mu = 0 & (2) \\ F_z = 1 - 2\lambda z = 0 & (3) \\ F_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 & (4) \\ F_\mu = -(x - y - 1) = 0 & (5) \end{cases}$$

Par (3) on sait que $\lambda \neq 0$ et donc $z = \frac{1}{2\lambda}$. Ensuite

$$(1) + (2) \Rightarrow 2 - 2\lambda(x + y) = 0 \Rightarrow x + y = \frac{1}{\lambda} = 2z$$

De plus (5) $\Rightarrow y = x - 1$ et donc $z = x - \frac{1}{2}$. On insère ces expressions dans (4)

$$x^2 + (x - 1)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 3x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0,$$

ce qui donne deux solutions :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

et les solutions du système sont

$$(x, y, z) \in \left\{ \left(\frac{1}{6}(3 + \sqrt{6}), \frac{1}{6}(-3 + \sqrt{6}), \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{6}(3 - \sqrt{6}), \frac{1}{6}(-3 - \sqrt{6}), -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

La fonction f admet un maximum en $\left(\frac{1}{6}(3 + \sqrt{6}), \frac{1}{6}(-3 + \sqrt{6}), \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ de valeur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et un minimum en $\left(\frac{1}{6}(3 - \sqrt{6}), \frac{1}{6}(-3 - \sqrt{6}), -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ de valeur $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 2.

On cherche les extremums de $f(x, y, z) = z$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 4x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2 - 4x - 1 = 0$. Notons que $\nabla g(x, y, z) = (8x - 4, 6y + 2z, 2y + 6z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ mais $g\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = -2 \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ pour tout (x, y, z) tel que $g(x, y, z) = 0$. La fonction de Lagrange est

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = z - \lambda(4x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2 - 4x - 1)$$

et il faut résoudre le système

$$\begin{cases} F_x = -\lambda(8x - 4) & = 0 & (1) \\ F_y = -\lambda(6y + 2z) & = 0 & (2) \\ F_z = 1 - \lambda(2y + 6z) & = 0 & (3) \\ F_\lambda = -(4x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2 - 4x - 1) & = 0 & (4) \end{cases}$$

Observons que $\lambda \neq 0$ à cause de (3). Par (1) on a alors $x = \frac{1}{2}$ et par (2) on a $z = -3y$, qu'on insère dans (3) pour obtenir $y = -\frac{1}{16\lambda}$. Tout cela inséré dans (4) donne

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{256\lambda^2} - \frac{6}{256\lambda^2} + \frac{27}{256\lambda^2} - 2 - 1 &= \frac{24}{256\lambda^2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{12}{256} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{2\sqrt{3}}{16} \\ &\Rightarrow \quad y = \mp \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi les solutions du système sont

$$(x, y, z) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

et les valeurs maximale et minimale de z sont $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; elles sont réalisées aux points $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 3.

- i) Cherchons d'abord les extremums de f à l'intérieur du domaine $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Ils se trouvent parmi les points stationnaires de f :

$$\begin{cases} f_x = 4x - y - 6 = 0 \\ f_y = -x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$$

d'où le seul point stationnaire $x_1 = y_1 = 2$.

Soit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 32$. Alors $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ mais $g(0, 0) \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ sur le bord de D . On peut donc trouver les extremums de f sur le bord de D par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La fonction de Lagrange

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y - \lambda(x^2 + y^2 - 32)$$

donne le système d'équations

$$\begin{cases} F_x = 4x - y - 6 - 2\lambda x = 0 & (1) \\ F_y = -x + 4y - 6 - 2\lambda y = 0 & (2) \\ F_\lambda = -(x^2 + y^2 - 32) = 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant (1) - (2) on obtient $(x - y)(5 - 2\lambda) = 0$, c.-à-d. $y = x$ ou $\lambda = \frac{5}{2}$.

Si $y = x$, alors on obtient les solutions $x_2 = y_2 = 4$ et $x_3 = y_3 = -4$ de (3).

Si $\lambda = \frac{5}{2}$, alors $y = -(x + 6)$ par (1) et (3) devient $x^2 + 6x + 2 = 0$, d'où on trouve $x_4 = -3 + \sqrt{7}$, $y_4 = -3 - \sqrt{7}$ et $x_5 = -3 - \sqrt{7}$, $y_5 = -3 + \sqrt{7}$.

Les valeurs maximale et minimale de f sur le domaine D sont réalisées parmi les points (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, 5$). En évaluant f en ces cinq points, on trouve

$$f(x_1, y_1) = -12, \quad f(x_2, y_2) = 0, \quad f(x_3, y_3) = 96, \quad f(x_4, y_4) = 98, \quad f(x_5, y_5) = 98.$$

Ainsi, la valeur minimale de f est -12 , atteinte en $(2, 2)$, et la valeur maximale est 98 , atteinte en $(-3 + \sqrt{7}, -3 - \sqrt{7})$ et $(-3 - \sqrt{7}, -3 + \sqrt{7})$.

Dans l'Ex. 5 ii) de la Série 11 on a calculé les extremums de la même fonction f sur le demi-disque positif du même rayon, noté ici par D^+ . Le minimum de f était atteint en $(2, 2)$ et le maximum en $(-4\sqrt{2}, 0)$. Les extremums de f sur D doivent donc être au moins aussi extrêmes que ceux sur D^+ . En l'occurrence, le minimum est le même, mais la fonction f atteint des valeurs plus grandes sur le demi-cercle inférieur que sur D^+ si bien que le maximum a changé.

- ii) Soit $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ la boule considérée. On commence par chercher les extremums de f à l'intérieur de D . Les points stationnaires de f satisfont

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 2y + 2 = 0 \\ f_z = 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right) \text{ est le seul point stationnaire}$$

qui est bien à l'intérieur de D car $1^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \leq 4$.

Pour trouver les extremums de f sur le bord de D , on définit $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ en sorte que le bord de D est l'ensemble $\{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$. Notons qu'on a $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$ mais $g(0, 0, 0) = -4 \neq 0$ et donc $\nabla g \neq 0$ sur le bord de D .

On introduit la fonction de Lagrange

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z - \frac{5}{4} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4).$$

et on résout le système qui décrit les points stationnaires de F , à savoir

$$\begin{cases} F_x = 2x - 2 - 2\lambda x = 2(1 - \lambda)x - 2 = 0 & (1) \\ F_y = 2y + 2 - 2\lambda y = 2(1 - \lambda)y + 2 = 0 & (2) \\ F_z = 2z - 1 - 2\lambda z = 2(1 - \lambda)z - 1 = 0 & (3) \\ F_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 4) = 0 & (4) \end{cases}$$

Comme $\lambda \neq 1$ (sinon (1) à (3) ne sont pas satisfaites), on peut diviser par $1 - \lambda$ pour obtenir à partir de (1) à (3)

$$x = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad y = -\frac{1}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{1}{2(1 - \lambda)}$$

qu'on met ensuite dans (4) qui devient

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{1}{4(1 - \lambda)^2} - 4 = 0 & \Leftrightarrow 9 - 16(1 - \lambda)^2 = 0 & \Leftrightarrow 16\lambda^2 - 32\lambda + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + \frac{7}{16} = \left(\lambda - \frac{7}{4}\right) \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = 0 & \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{7}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$x_1 = -\frac{4}{3}, \quad y_1 = \frac{4}{3}, \quad z_1 = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4}{3}, \quad y_2 = -\frac{4}{3}, \quad z_2 = \frac{2}{3}.$$

On calcule la valeur de f aux extremums potentiels sur D

(x, y, z)	$(1, -1, \frac{1}{2})$	$(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$	$(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$
$f(x, y, z)$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{35}{4}$	$-\frac{13}{4}$

Ainsi le minimum de f sur D est $-\frac{7}{2}$, atteint en $(1, -1, \frac{1}{2})$, et le maximum est $\frac{35}{4}$, atteint en $(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

Exercice 4.

- i) Soient x et y les longueurs des cathètes d'un triangle rectangle. Son aire est alors $A = \frac{xy}{2}$ et l'hypothénuse est de longueur $\sqrt{x^2 + y^2}$. Pour simplifier, on définit une fonction-objectif équivalente, c.-à-d. $f(x, y) = x^2 + y^2$ qu'on veut minimiser sous la contrainte $g(x, y) = xy - 2A = 0$.

Notons que $\nabla g(x, y) = (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ mais que $g(0, 0) = -2A \neq 0$. Donc $\nabla g(x, y) \neq 0$ pour tout (x, y) satisfaisant $g(x, y) = 0$. La fonction de Lagrange est alors

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 2A)$$

ce qui mène au système

$$\begin{cases} F_x = 2x - \lambda y = 0 & (1) \\ F_y = 2y - \lambda x = 0 & (2) \\ F_\lambda = -(xy - 2A) = 0 & (3) \end{cases}$$

pour les points stationnaires de F .

De (1) on trouve $x = \frac{\lambda}{2}y$, d'où $(2 - \frac{1}{2}\lambda^2)y =$ par (2). Si $y = 0$, (3) ne peut être satisfaite, donc on a $\lambda^2 = 4$, ou encore $\lambda = \pm 2$. Ainsi $x = \pm y$ mais comme x, y sont les deux positifs, on doit avoir $x = y$. Il découle alors de (3) que $x = y = \sqrt{2A}$. Par conséquent le triangle rectangle avec hypoténuse minimale est le triangle rectangle isocèle dont chaque cathète vaut $\sqrt{2A}$.

- ii) On cherche le minimum de la fonction-objectif $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (distance du point (x, y, z) à l'origine au carré) sur l'ensemble $\Gamma := \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = 0 \text{ et } g_2(x, y, z) = 0\}$ avec

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad \text{et} \quad g_2(x, y, z) = x + y - z + 1.$$

On peut montrer que $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$ et $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, -1)$ sont linéairement indépendants sur Γ par un argument similaire à celui à l'Ex. 1 ii).

La fonction de Lagrange est

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda, \mu) &= f(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 - z^2) - \mu(x + y - z + 1) \end{aligned}$$

d'où le système

$$\begin{cases} F_x = 2x - 2\lambda x - \mu = 2(1 - \lambda)x - \mu = 0 & (1) \\ F_y = 2y - 2\lambda y - \mu = 2(1 - \lambda)y - \mu = 0 & (2) \\ F_z = 2z + 2\lambda z + \mu = 2(1 + \lambda)z + \mu = 0 & (3) \\ F_\lambda = -(x^2 + y^2 - z^2) = 0 & (4) \\ F_\mu = -(x + y - z + 1) = 0 & (5) \end{cases}$$

En faisant (1) - (2) on trouve $2(1 - \lambda)(x - y) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ ou $x = y$.

Si $\lambda = 1$, alors $\mu = 0$ et par (3) on a $z = 0$. Par (4) il suit que $x = y = 0$. Mais $(0, 0, 0)$ ne satisfait pas (5), donc ce n'est pas une solution.

Si $x = y$, alors $z = 2x + 1$ par (5). Pour un point de la forme $(x, x, 2x + 1)$, (4) s'écrit

$$2x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = y \quad \text{et} \quad z = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Il reste alors à vérifier que ces valeurs de (x, y, z) sont compatibles avec les équations (1) et (3). Pour ceci, insérons les valeurs obtenues dans (1) et (3) et écrivons le tout sous forme

matricielle $A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = b$:

$$\begin{cases} 2(1 - \lambda) \left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \mu = 0 \\ 2(1 + \lambda) \left(-1 \pm \sqrt{2}\right) + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \pm \sqrt{2} & 1 \\ -2 \pm 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \pm \sqrt{2} \\ 2 \mp 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A) = \pm\sqrt{2} \mp 2\sqrt{2} = \mp\sqrt{2} \neq 0$, il existe des solutions pour λ et μ (qu'on n'a pas besoin de chercher).

Ainsi les solutions du système $\nabla F = 0$ sont

$$p_1 = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad p_2 = \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}\right).$$

et

$$f\left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 \pm \sqrt{2}\right) = 2\left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)^2 = \mp 4\sqrt{2}$$

Ainsi p_1 réalise la distance minimale $6 - 4\sqrt{2}$.

Exercice 5.

Observons d'abord que les deux axes de l'ellipse sont les droites qui passent par le centre et les deux points sur l'ellipse dont la distance au centre est maximale respectivement minimale. On cherche donc les extremums de la distance au centre.

Comme l'axe du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ est l'axe z , le centre de l'ellipse se trouve aussi sur l'axe z , i.e. il est de la forme $(0, 0, z)$. De plus, l'ellipse est dans le plan $x + y + 2z = 2$, et donc son centre est $(0, 0, 1)$. On cherche donc les droites qui contiennent les extremums de la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2,$$

sur $\Gamma = \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = 0 \text{ et } g_2(x, y, z) = 0\}$, où $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4$ et $g_2(x, y, z) = x + y + 2z - 2$.

Or, $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ et $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, 2)$ sont linéairement dépendants seulement en des points $(0, 0, z)$ qui ne sont pas contenus dans le cylindre.

En posant $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z)$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} F_x = 2x - 2\lambda x - \mu & = 0 & (1) \\ F_y = 2y - 2\lambda y - \mu & = 0 & (2) \\ F_z = 2z - 2 - 2\mu & = 0 & (3) \\ F_\lambda = -(x^2 + y^2 - 4) & = 0 & (4) \\ F_\mu = -(x + y + 2z - 2) & = 0 & (5) \end{cases}$$

De (1) et (2) on obtient $x = \frac{\mu}{2(1-\lambda)} = y$. Supposons donc pour l'instant que $\lambda \neq 1$, le cas $\lambda = 1$ sera traité après. Par (3) on a

$$z = \mu + 1 \quad \text{et donc} \quad x = y = \frac{z - 1}{2(1 - \lambda)}. \quad (6)$$

En récrivant (5) en fonction de z , on a

$$\frac{z - 1}{1 - \lambda} + 2z - 2 = \left(2 + \frac{1}{1 - \lambda}\right)(z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \text{ ou } \lambda = \frac{3}{2}.$$

Quand $z = 1$, il suit de (6) que $x = y = 0$. Mais le point $(0, 0, 1)$ ne satisfait pas (4), donc ce n'est pas une solution.

Quand $\lambda = \frac{3}{2}$, (6) implique que $x = y = 1 - z$ et si bien que (4) devient

$$2(1 - z)^2 - 4 = 2(z^2 - 2z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \pm \sqrt{2}$$

et donc $x = y = \mp \sqrt{2}$.

Lorsque $\lambda = 1$, on a $\mu = 0$ par (1) et (2), d'où il suit par (3) que $z = 1$. De (5) on tire que $x = -y$, qui, inséré dans (4), donne

$$2y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \mp \sqrt{2}.$$

Les solutions du système sont donc

$$(x, y, z) \in \left\{ (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1) \right\}$$

et on a

$$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}) = 6 \quad \text{et} \quad f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1) = 4.$$

Ainsi le grand axe de l'ellipse est sur la droite d_1 et le petit axe sur la droite d_2 définies par

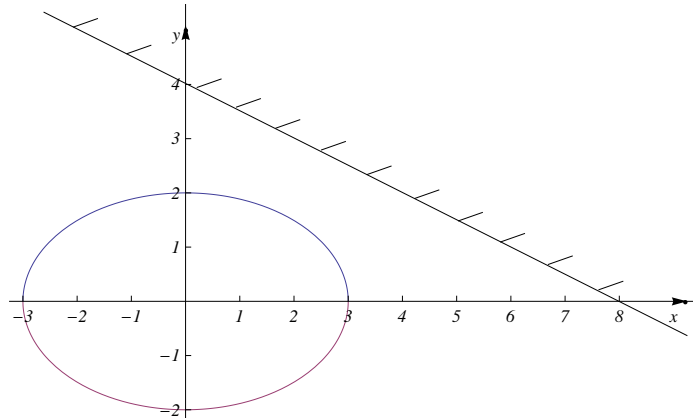
$$d_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = t, y = t, z = 1 - t, t \in \mathbb{R}\}$$

$$d_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = s, y = -s, z = 1, s \in \mathbb{R}\}.$$

Noter qu'on a utilisé le centre $(0, 0, 1)$ de l'ellipse comme point de référence.

Exercice 6.

Les régions $\{(x, y) : x + 2y \geq 8\}$ et $\{(x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ dans lesquelles se trouvent P et Q sont un demi-plan et une ellipse centrée à l'origine respectivement (cf. figure ci-après).



Il est alors géométriquement évident que si la distance entre les points $P \in \{(x, y) : x + 2y \geq 8\}$ et $Q \in \{(x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ est minimale, ces points se trouvent sur le bord de leur ensemble respectif.

En écrivant $P = (x, y)$ et $Q = (u, v)$, le problème revient à trouver le minimum de la fonction

$$f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

sous les conditions

$$g_1(x, y, u, v) = x + 2y - 8 = 0 \quad \text{et} \quad g_2(x, y, u, v) = 4u^2 + 9v^2 - 36 = 0.$$

Les vecteurs $\nabla g_1(x, y, u, v) = (1, 2, 0, 0)$ et $\nabla g_2(x, y, u, v) = (0, 0, 8u, 18v)$ sont linéairement indépendants sur $\Gamma = \{(x, y, u, v) : g_1(x, y, u, v) = 0 \text{ et } g_2(x, y, u, v) = 0\}$. En effet, si $\alpha \nabla g_1 + \beta \nabla g_2 = 0$, il est immédiat que $\alpha = 0$. Si $\beta \neq 0$ alors $u = v = 0$ mais $g_2(x, y, 0, 0) = -36 \neq 0$ et donc $(x, y, 0, 0) \notin \Gamma$.

On peut donc utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La fonction de Lagrange est

$$\begin{aligned} F(x, y, u, v, \lambda, \mu) &= f(x, y, u, v) - \lambda g_1(x, y, u, v) - \mu g_2(x, y, u, v) \\ &= (x - u)^2 + (y - v)^2 - \lambda(x + 2y - 8) - \mu(4u^2 + 9v^2 - 36) \end{aligned}$$

d'où le système

$$\begin{cases} F_x = 2(x - u) - \lambda & = 0 & (1) \\ F_y = 2(y - v) - 2\lambda & = 0 & (2) \\ F_u = -2(x - u) - 8\mu u & = 0 & (3) \\ F_v = -2(y - v) - 18\mu v & = 0 & (4) \\ F_\lambda = -(x + 2y - 8) & = 0 & (5) \\ F_\mu = -(4u^2 + 9v^2 - 36) & = 0 & (6) \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, alors les équations (1) à (4) impliquent que $x = u$, $y = v$. Mais de (5) on a $v = 4 - \frac{u}{2}$ et en remplaçant ceci dans (6), on obtient $\frac{25}{4}u^2 - 36u + 108 = 0$ qui n'admet pas de solution réelle. On a donc $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$.

Alors (1) et (2) impliquent que $2(x - u) = y - v$ et en utilisant cette relation dans (3) et (4) on trouve que $8u = 9v$.

On reporte ces valeurs dans (6) qui devient

$$\frac{100}{9}u^2 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \pm \frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad v = \pm \frac{8}{5}.$$

A partir de $2(x - u) = y - v$ on trouve maintenant $2x - y = \pm \frac{18}{5} \mp \frac{8}{5} = \pm 2 \Rightarrow y = 2x \mp 2$. Avec ceci l'équation (5) s'écrit

$$x + 4x \mp 4 - 8 = 5x - \begin{cases} 12 \\ 4 \end{cases} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{5} \text{ ou } x = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{14}{5} \text{ ou } y = \frac{18}{5}.$$

Les deux solutions du système sont alors

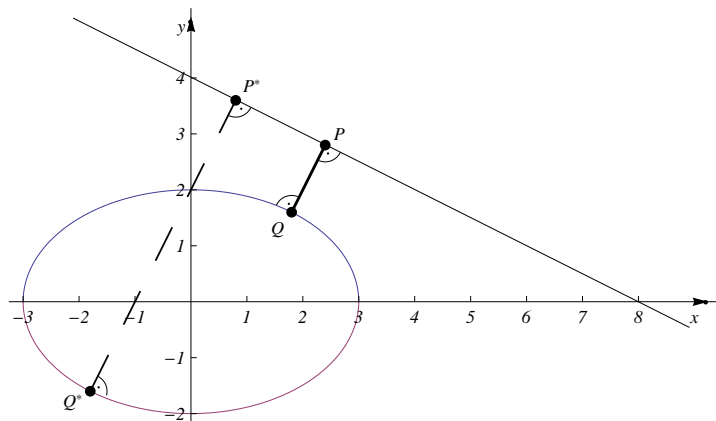
$$x = \frac{12}{5}, \quad y = \frac{14}{5}, \quad u = \frac{9}{5}, \quad v = \frac{8}{5} \quad \text{et} \quad x = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{18}{5}, \quad u = -\frac{9}{5}, \quad v = -\frac{8}{5}.$$

La distance entre $P = (\frac{12}{5}, \frac{14}{5})$ et $Q = (\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$ vaut $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ et celle entre $P^* = (\frac{4}{5}, \frac{18}{5})$ et $Q^* = (-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5})$ vaut $\frac{13}{\sqrt{5}}$. Ainsi la distance est minimale entre P et Q .

Interprétation géométrique

On constate que le vecteur $\overrightarrow{PQ} = -\frac{3}{5}(1, 2)$ est orthogonal à la droite $g_1(x, y) = x + 2y - 8 = 0$ en P et à l'ellipse $g_2(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ en Q parce que \overrightarrow{PQ} est parallèle à $\nabla g_1(P) = (1, 2)$ et à $\nabla g_2(Q) = \frac{2}{5} \cdot (1, 2)$.

L'autre solution $P^* = (\frac{4}{5}, \frac{18}{5})$ et $Q^* = (-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5})$ réalise un point-selle de f (cf. figure ci-dessous). En fait, il n'existe pas de distance maximale.



Exercice 7.**Q1 :** Soit l'équation différentielle

$$y'(y + x^2y) = x$$

pour $x \in \mathbb{R}$ avec $y(0) = 2$. Alors la solution $y(x)$ vérifie

$y(1) = \sqrt{4 + 2 \ln(2)}$

$y(1) = 2 + \sqrt{\ln(2)}$

$y(1) = \sqrt{4 + \ln(2)}$

$y(1) = -\sqrt{4 + \ln(2)}$

On peut récrire l'équation sous la forme

$$\frac{dy}{dx} \cdot y(1 + x^2) = x$$

et on peut donc séparer les variables. On obtient

$$y dy = \frac{x}{1 + x^2} dx$$

et en intégrant on trouve

$$\frac{1}{2}y(x)^2 = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $y(0) = 2$ on a $C = 2$ et donc

$$y(x) = \sqrt{\ln(1 + x^2) + 4}.$$

Ainsi $y(1) = \sqrt{\ln(2) + 4}$.**Q2 :** Soit l'équation différentielle

$$y' \sin(x) + y \cos(x) + \sin(2x) = 0$$

pour $x \in]0, \pi[$. Alors la solution générale est

$y(x) = \frac{\sin(x)^2 + C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$y(x) = \frac{\cos(x)^2 + C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$y(x) = \frac{\sin(x)^2 + C}{\cos(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$y(x) = e^{-\ln(\sin(x))} \cos(2x) + \frac{C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire. La solution générale est donc de la forme

$$y(x) = y_{\text{part}}(x) + C y_{\text{hom}}(x)$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Pour trouver $y_{\text{hom}}(x)$ il faut résoudre l'équation homogène

$$y' \sin(x) + y \cos(x) = 0.$$

La séparation des variables donne

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx$$

et en intégrant on obtient

$$\ln(|y(x)|) = -\ln(|\sin(x)|) + \tilde{C}$$

avec $\tilde{C} \in \mathbb{R}$, et donc

$$y_{\text{hom}}(x) = \frac{C}{\sin(x)}.$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Ensuite on fait la variation de la constante qui donne

$$\left(C'(x) \frac{1}{\sin(x)} \right) \sin(x) + \sin(2x) = 0,$$

d'où il suit que

$$C'(x) = -\sin(2x)$$

et donc $C(x) = \frac{1}{2} \cos(2x)$. Finalement on a

$$y_{\text{part}}(x) = \frac{\frac{1}{2} \cos(2x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)^2 - \frac{1}{2}}{\sin(x)}.$$

(*Rappel:* $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1$.)

La solution générale est alors

$$y(x) = \frac{\cos(x)^2 - \frac{1}{2}}{\sin(x)} + C \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)^2 + (-\frac{1}{2} + C)}{\sin(x)}.$$

Puisque $C \in \mathbb{R}$ est arbitraire on peut récrire la solution comme

$$y(x) = \frac{\cos(x)^2 + C}{\sin(x)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Q3 : Soit l'équation différentielle

$$x y' - y = x \cos\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

pour $x \in]0, \infty[$ avec $y(1) = \frac{\pi}{4}$. Alors

$y(x) = x \arctan(\ln(x) + 1)$

$y(x) = x \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$y(x) = \frac{1}{x} \arctan(\ln(x) + 1)$

$y(x) = x \arctan(\ln(x)^2 + 1)$

Remarque : effectuer le changement de variables $y(x) = x v(x)$

On peut récrire l'équation sous la forme

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

ce qui est une équation différentielle homogène. On pose $y(x) = x v(x)$ et l'on obtient

$$v + x v' = v + \cos(v)^2$$

ou

$$x v' = \cos(v)^2.$$

Par séparation des variables on obtient

$$\frac{dv}{\cos(v)^2} = \frac{dx}{x}$$

et par intégration

$$\tan(v) = \ln(x) + C$$

et donc

$$y(x) = x \arctan(\ln(x) + C)$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Avec la condition initiale on trouve

$$y(1) = \arctan(C) = \frac{\pi}{4}$$

et donc $C = 1$. La solution recherchée est alors

$$y(x) = x \arctan(\ln(x) + 1).$$

Exercice 8.

La fonction f est continue sur \mathbb{R}^2 , car la fonction ρ est continue sur \mathbb{R}^2 , la fonction h est continue sur \mathbb{R} ce qui implique que la fonction $2x h\left(\frac{y}{x^2} - 2\right)$ est continue sur le demi-plan à droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} 2x h\left(\frac{y}{x^2} - 2\right) = 0.$$

En particulier on a donc que $f(0, 0) = 1$. La fonction ρ a comme graphe le cône comme discuté à plusieurs occasions pendant les cours (voir le manuscrit). En $(0, 0)$ ρ admet des dérivées directionnelles unilatérales égales à -1 suivant tout vecteur unitaire $\mathbf{e} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ car on a $g(t) = \rho(t \cos(\phi), t \sin(\phi)) = 1 - |t|$ et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-|t|}{t} = -1.$$

Par la définition de la fonction h , la fonction $2x h\left(\frac{y}{x^2} - 2\right)$ est non-nulle uniquement si $-1 < \frac{y}{x^2} - 2 < 1$, c.-à-d., puisque $x > 0$, pour les points (x, y) du premier quadrant qui satisfont $1 < \frac{y}{x^2} < 3$, autrement dit, donné $x > 0$ pour y tel que $x^2 < y < 3x^2$. Ceci implique que pour

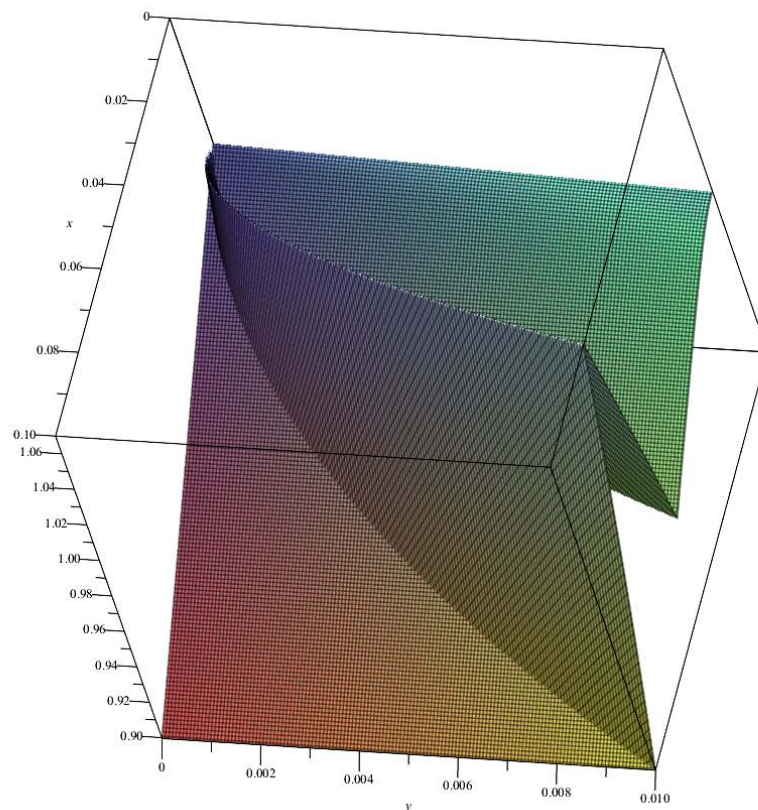
des points de la forme $(x, y) = t\mathbf{e} = (t \cos(\phi), t \sin(\phi))$ avec $\mathbf{e} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ un vecteur unitaire du premier quadrant, c.-à-d. pour $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, on devrait avoir que

$$t^2 \cos(\phi)^2 < t \sin(\phi) < 3t^2 \cos(\phi)^2,$$

pour que la fonction $2x h\left(\frac{y}{x^2} - 2\right)$ prenne des valeurs non nulles. Cependant, la deuxième inégalité est toujours violée si t est suffisamment petit. Ceci veut dire que, donné ϕ , les points $(t \cos(\phi), t \sin(\phi))$ se trouvent, pour t suffisamment petit, tous à l'extérieur de la région où la fonction $2x h\left(\frac{y}{x^2} - 2\right)$ est non nulle. En conclusion, la dérivée directionnelle de la fonction f en $(0, 0)$ suivant tout vecteur unitaire \mathbf{e} est donc bien égale à -1 . Par contre le long du chemin $c: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 2t^2)$ on a pour $t > 0$, t suffisamment petit:

$$(f \circ c)(t) = 1 - \sqrt{t^2 + t^4} + 2t \geq 1 - \sqrt{t^2 + t^2} + 2t = 1 - \sqrt{2}t + 2t > 1.$$

La fonction f admet donc dans tout voisinage de $(0, 0)$ des valeurs strictement plus petit et plus grand que $f(0, 0) = 1$ et il s'agit donc d'un point-selle (selon les définitions du cours). La figure suivante montre le graphe de la fonction f au dessus du rectangle $[0, 0.1] \times [0, 0.01] \subset \mathbb{R}^2$ du premier quadrant.



Analyse avancée II – Série 12B

Exercice 1.

Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy^2}{(x^2 + y^4)^{\frac{3}{2}}}$. Alors

- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = y$
- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = 0$
- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = 1$
- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y)$ n'existe pas

Exercice 2.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors

- f n'est pas continue en $(0, 0)$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas
- f est différentiable en $(0, 0)$
- f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Exercice 3.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$. Alors $\int_D \frac{\tan(y)}{x^2 + y^2 + 1} dx dy > 1$.

- VRAI FAUX

Exercice 4.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (\cos(xz), \sin(y - z))^T$. Alors la matrice jacobienne $J_f(x, y, z)$ de f évaluée au point $\mathbf{p} = (1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ est :

$J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

Soit $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $h(u, v) = (-u(1-2v), u^2(1-v), uv)^T$ et soit $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$, une fonction de classe C^1 . Alors la dérivée partielle par rapport à v de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(u, v) = g(h(u, v))$, satisfait en $(u, v) = (1, 0)$:

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0, 0) - \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = -\frac{\partial g}{\partial x}(-1, 1, 0) + 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1, 1, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2\frac{\partial g}{\partial x}(-1, 1, 0) - \frac{\partial g}{\partial y}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial z}(-1, 1, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(-1, 1, 0) - 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial z}(-1, 1, 0)$

Exercice 6.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x - y - x^2 + y^3$ et soit le point $\mathbf{p} = (-2, 1)$. Alors le plan tangent au graphe de f en $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ est donné par l'équation :

$z - 5x - 2y + 6 = 0$

$z - 5x - 2y - 2 = 0$

$z - 5x - 2y - 8 = 0$

$z - 2x - 5y + 7 = 0$

Exercice 7.

L'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \neq 0\}$ est fermé.

VRAI FAUX

Exercice 8.

Le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = e^{x^2+y-1}$$

au point $(1, 0)$ est :

$p_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + y + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)y + y^2$

$p_2(x, y) = -1 + 2(x - 1) + y + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1)y + \frac{1}{2}y^2$

$p_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + y + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1)y + \frac{1}{2}y^2$

$p_2(x, y) = 1 + 2x + y + 3x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$

Exercice 9.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 2x^2y^3z^4 + 2x^3y^2 - 3y^2z - 1$ et soit $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$. Puisque $f(\mathbf{p}) = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \neq 0$, l'équation $f(x, y, z) = 0$ définit dans un voisinage de $(y, z) = (1, 1)$ une fonction $x = g(y, z)$ qui satisfait $g(1, 1) = 1$ et $f(g(y, z), y, z) = 0$ ainsi que :

$\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\frac{1}{2}$

$\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = \frac{1}{2}$

$\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -2$

$\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\frac{4}{5}$

Exercice 10.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 1 \text{ et } y > -1\}$ et soit la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$. Alors un vecteur \mathbf{v} dans la direction perpendiculaire à la ligne de niveau de f qui passe par le point $(2, 0)$ est :

$\mathbf{v} = (-4, 1)^T$

$\mathbf{v} = (1, -4)^T$

$\mathbf{v} = (4, 1)^T$

$\mathbf{v} = (-\frac{1}{4}, -1)^T$

Exercice 11.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 2y + 1$. Alors le point $\mathbf{p} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

- est un point de maximum local de f
 n'est pas un point stationnaire de f
 est un point selle de f
 est un point de minimum local de f

Exercice 12.

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$. La valeur maximale de f sous la contrainte $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4 = 0$ est :

- 1
 $\sqrt{2}$
 0
 $-\sqrt{2}$

Exercice 13.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ et soit la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = y + 2x$. Alors le maximum absolu $M = \max_{(x,y) \in D} f(x, y)$ de f sur D et le minimum absolu $m = \min_{(x,y) \in D} f(x, y)$ de f sur D satisfont :

- $M = \sqrt{5}$ et $m = 0$
 $M = \sqrt{5}$ et $m = -\sqrt{5}$
 $M = \sqrt{5}$ et $m = -1$
 $M = 1$ et $m = -1$

Exercice 14.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \geq 0, x \leq 0\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D xy \, dx \, dy$$

vaut :

- 3π
 30
 -30
 0

Exercice 15.

La solution $u(t)$ de l'équation différentielle $u'' - 4u' + 5u = 8 \sin(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 2$ et $u'(0) = 5$ est :

- $u(t) = -\sin(t)(2e^{2t} + 1) + \cos(t)(e^{2t} + 1)$
 $u(t) = \sin(t)(2e^{2t} + 1) + \cos(t)(e^{2t} + 1)$
 $u(t) = \sin(t)(4e^{2t} - 1) + \cos(t)(e^{2t} + 1)$
 $u(t) = \sin(t)(2e^{2t} + 1) - \cos(t)(e^{2t} + 1)$

Exercice 16.

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $(x^2 + 9)y' + xy - xy^2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{4}$ satisfait aussi :

- $y(4) = 6$
 $y(4) = 1$
 $y(4) = \frac{1}{6}$
 $y(4) = -\frac{1}{4}$

Exercice 17.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 f(x, y) dy \right) dx$$

est égale à :

- $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$
 $\int_{-1}^1 \left(\int_{-y^2}^{y^2} f(x, y) dx \right) dy$
 $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$
 $\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$

Exercice 18.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles ouverts et $f: A \rightarrow B$ une fonction bijective avec f et f^{-1} de classe C^1 . Alors pour tout $\mathbf{p} \in A$ on a $\det(J_f(\mathbf{p})) \neq 0$.

- VRAI FAUX

Exercice 19.

Soient p , q et g des fonctions continues de $I \rightarrow \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, et soit $L(u) = u'' + p u' + q u$. Si u_h est solution de l'équation différentielle $L(u) = 0$ et u_p est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$, alors $u_p + \frac{1}{2}u_h$ est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$.

VRAI FAUX

Exercice 20.

Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 1$. Si pour tout $\varphi \in [0, 2\pi[$ fixé on a $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = 1$, alors f est continue en $(0,0)$.

VRAI FAUX

Exercice 21.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})$ pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$.

VRAI FAUX

Exercice 22.

Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est différentiable en tout point de \mathbb{R}^2 , alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

VRAI FAUX

Exercice 23.

Soient $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ deux fonctions de classe C^1 . Alors la fonction $h = g \circ f$ est de classe C^1 et on a pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ que $J_h(\mathbf{p}) = J_g(f(\mathbf{p})) J_f(\mathbf{p})$.

VRAI FAUX

Exercice 24.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe C^2 . Alors pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{h}$$

VRAI FAUX

Exercice 25.

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en \mathbf{p} , alors \mathbf{p} est un point stationnaire de f .

VRAI FAUX

Exercice 26.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Si \mathbf{p} est un point stationnaire de f et si le déterminant de la matrice hessienne $H_f(\mathbf{p})$ est strictement négatif, alors f admet un maximum local en \mathbf{p} .

VRAI FAUX

Exercice 27.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, une fonction qui est différentiable en un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Alors le vecteur $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), -\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), -\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}), 1\right)^T$ est perpendiculaire à l'hyperplan tangent au graphe de f en $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$.

VRAI FAUX

Exercice 28.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble borné et fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé. Si $G: \tilde{D} \rightarrow D$ est une fonction bijective de classe C^1 alors on a :

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{D}} f(G(u, v)) |\det (J_G(u, v))| du dv$$

VRAI FAUX

Exercice 29.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Alors la dérivée directionnelle de f en $(0, 0)$ suivant le vecteur $v = (1, 1)^T$ est égale à la limite :

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ (h,k) \neq (0,0)}} \frac{f(h, k) - f(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

VRAI FAUX

Exercice 30.

Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné et fermé. Si f n'admet pas de maximum absolu sur D , alors f n'est pas continue sur D .

VRAI FAUX

Analyse avancée II – Corrigé de la Série 13A

Échauffement.

i) Intégrer d'abord par rapport à x correspond à l'intégrale donnée. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^3 - y^{1/3}) dx \right) dy &= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x^4 - y^{1/3}x \right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^1 (4 - 2y^{1/3}) dy \\ &= \left[4y - \frac{3}{2}y^{4/3} \right]_{y=0}^{y=1} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

ii) En inversant l'ordre d'intégration on a

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^3 - y^{1/3}) dy \right) dx &= \int_0^2 \left[x^3y - \frac{3}{4}y^{4/3} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{3}{4} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x \right]_{x=0}^{x=2} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Les résultats sont les mêmes puisque la fonction qu'on intègre est continue.

Exercice 1.

i) Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. 1. On a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \left(\int_0^1 \cos(x+y) dx \right) dy &= \int_{-1}^2 \left[\sin(x+y) \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^2 (\sin(1+y) - \sin(y)) dy \\ &= \left[-\cos(1+y) + \cos(y) \right]_{-1}^2 = 1 - \cos(1) + \cos(2) - \cos(3). \end{aligned}$$

ii) Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. 2. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_x^{2x} e^{x+y} dy \right) dx &= \int_0^1 \left[e^{x+y} \right]_{y=x}^{y=2x} dx = \int_0^1 (e^{3x} - e^{2x}) dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x} \right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{3}(e^3 - 1) - \frac{1}{2}(e^2 - 1) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

i) Le domaine D est représenté à la Fig. 3. On a

$$\begin{aligned} \int_D \sqrt{x+y} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \sqrt{x+y} dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(x+y)^{3/2} \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} ((2+y)^{3/2} - y^{3/2}) dy = \left[\frac{4}{15}((2+y)^{5/2} - y^{5/2}) \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{15} (9\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

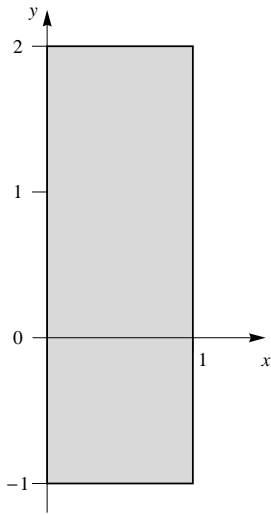


Fig. 1

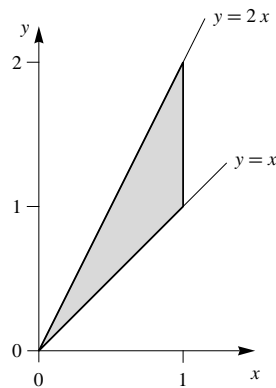


Fig. 2

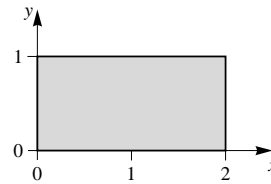


Fig. 3

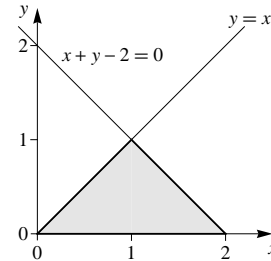


Fig. 4

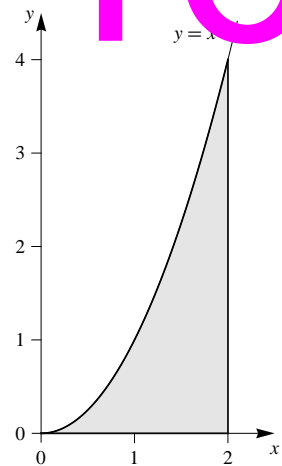


Fig. 5

ii) Le domaine D est représenté à la Fig. 5 ci-dessus. On a

$$\int_D x^2 y \, dx \, dy = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^6 \, dx = \left[\frac{1}{14} x^7 \right]_0^2 = \frac{64}{7}.$$

iii) Le domaine D est représenté à la Fig. 4 ci-dessus. Observons que $x-y \geq 0$ et $x+y-2 \leq 0$ sur D . Ainsi $(x-y)(x+y-2) \leq 0$ et donc $f(x, y) = -(x-y)(x+y-2) = -(x^2 - 2x - y^2 + 2y)$. On a

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) \, dx \, dy &= - \int_0^1 \left(\int_0^x (x^2 - 2x - y^2 + 2y) \, dy \right) dx - \int_1^2 \int_0^{2-x} (x^2 - 2x - y^2 + 2y) \, dy \, dx \\ &= - \int_0^1 \left[(x^2 - 2x)y - \frac{1}{3}y^3 + y^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &\quad - \int_1^2 \left[(x^2 - 2x)y - \frac{1}{3}y^3 + y^2 \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\ &\stackrel{*}{=} - \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 \right) dx - \int_1^2 \left(\frac{2}{3}(2-x)^3 - (2-x)^2 \right) dx \\ &= - \left[\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}(2-x)^4 - \frac{1}{3}(2-x)^3 \right]_1^2 \\ &= - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Pour l'étape * on a récrit le premier terme dans la deuxième intégrale comme

$$(x^2 - 2x)(2 - x) = -x(2 - x)^2 = ((2 - x) - 2)(2 - x)^2 = (2 - x)^3 - 2(2 - x)^2$$

pour arriver à

$$(x^2 - 2x)(2 - x) - \frac{1}{3}(2 - x)^3 + (2 - x)^2 = \frac{2}{3}(2 - x)^3 - (2 - x)^2$$

et ainsi éviter de développer tous les polynômes.

Exercice 3.

i) En respectant l'ordre d'intégration donné, on doit trouver une primitive de la fonction $e^{(x^2)}$ par rapport à x , ce qui est impossible. Il faut donc inverser l'ordre d'intégration et reparamétriser le domaine D qui est représenté à la Fig. 6 ci-dessous.

Dans l'ordre donné, on parcourt D du bas en haut selon des lignes horizontales. Inverser l'ordre d'intégration revient à parcourir D de gauche à droite en selon des lignes verticales. Ainsi x varie entre 0 et 1 et y varie entre 0 et x . On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{(x^2)} dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{(x^2)} dy \right) dx = \int_0^1 \left[ye^{(x^2)} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 xe^{(x^2)} dx = \left[\frac{1}{2} e^{(x^2)} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}. \end{aligned}$$

ii) On doit de nouveau inverser l'ordre d'intégration pour pouvoir calculer cette intégrale. Il faut donc parcourir le domaine D (cf. Fig. 7) de gauche à droite selon des lignes verticales, c'est-à-dire laisser varier x entre 0 et 1 et y entre 0 et x^3 .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4} dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4} dy \right) dx = \int_0^1 \left[y\sqrt{1+x^4} \right]_{y=0}^{y=x^3} dx = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} 4x^3 (1+x^4)^{1/2} dx = \left[\frac{1}{6} (1+x^4)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} (2\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

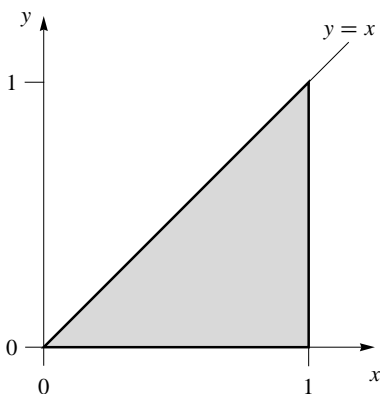


Fig. 6

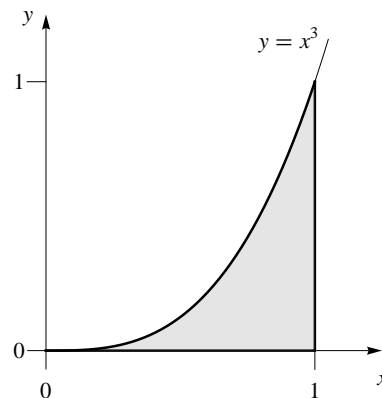


Fig. 7

Exercice 4.

Les points du domaine D satisfont

$$-\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x} \quad \text{et} \quad x-6 \leq y \leq x;$$

on a donc les inégalités

$$\max(-\sqrt{x}, x-6) \leq y \leq \min(\sqrt{x}, x) \quad \text{et} \quad x-6 \leq \sqrt{x}.$$

On fait les calculs :

$$x-6 \leq -\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) \leq 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4, \\ x \leq \sqrt{x} &\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1, \\ x - 6 \leq \sqrt{x} &\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq x \leq 9$ on a donc

$$\min(\sqrt{x}, x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \max(-\sqrt{x}, x - 6) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x - 6 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

c'est-à-dire D est le domaine représenté à la Fig. 8. (*Remarque:* On peut aussi arriver à ces résultats en traçant les graphes, et puis chercher les points d'intersection nécessaires.)

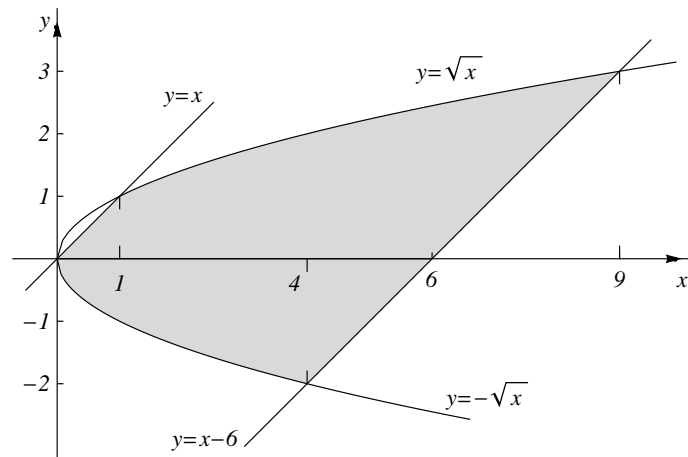


Fig. 8

On peut décomposer le domaine D en trois sous-domaines en coupant selon les droites verticales $x = 1$ et $x = 4$. L'aire de D est alors

$$\begin{aligned} \int_D dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^x dy \right) dx + \int_1^4 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy \right) dx + \int_4^9 \left(\int_{x-6}^{\sqrt{x}} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (x + \sqrt{x}) dx + \int_1^4 2\sqrt{x} dx + \int_4^9 (\sqrt{x} - x + 6) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}x^{3/2} \right]_1^4 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_4^9 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{32}{3} - \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{54}{3} - \frac{81}{2} + 54 \right) - \left(\frac{16}{3} - 8 + 24 \right) = \frac{62}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 5.

i) On pose le changement de variables $(x, y) = G(u, v)$. L'intégrale de f sur D est alors (cf. cours)

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{D}} f(G_1(u, v), G_2(u, v)) |\det(J_G(u, v))| du dv,$$

où

$$J_G(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial v} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

est la matrice Jacobienne de G .

ii) Pour les coordonnées polaires on a

$$G(r, \theta) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)),$$

avec $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$. La matrice Jacobienne est

$$J_G(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

d'où le Jacobien $\det(J_G(r, \varphi)) = r \cos(\varphi)^2 + r \sin(\varphi)^2 = r$.

Comme $H = G^{-1}$, la matrice $J_H(x, y)$ est l'inverse de la matrice $J_G(r, \varphi)$ mais évaluée en $(r, \varphi) = (H_1(x, y), H_2(x, y))$. La relation entre les deux Jacobiens est donc

$$\det(J_H(x, y)) = \left[\frac{1}{\det(J_G(r, \varphi))} \right]_{(r, \varphi)=H(x, y)} = \left[\frac{1}{r} \right]_{r=\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

où on a utilisé que $H_1(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ pour les coordonnées polaires.

iii) On utilise les coordonnées polaires sur le domaine $]0, R] \times [0, 2\pi[$. Ainsi l'aire du cercle est

$$\text{aire}(D_R) = \int_{D_R} dx dy = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R = \pi R^2.$$

Exercice 6.

Les équations des droites délimitant le parallélogramme D sont données à la Fig. 9.

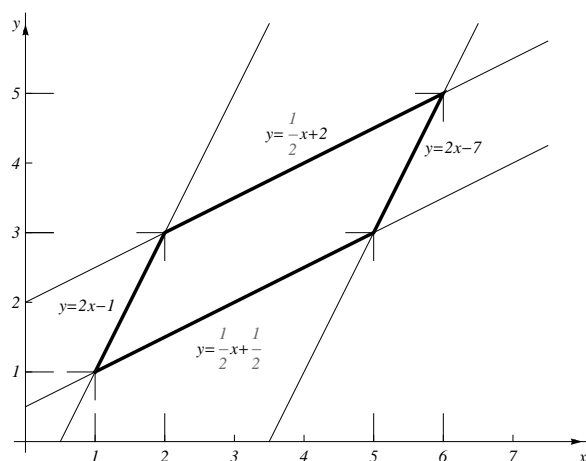


Fig. 9

On décompose le domaine en trois sous-domaines en coupant selon les droites verticales $x = 2$ et $x = 5$. Ainsi l'aire du parallélogramme est

$$\begin{aligned} \int_D dx dy &= \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{2x-1} dy \right) dx + \int_2^5 \left(\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x+2} dy \right) dx + \int_5^6 \left(\int_{2x-7}^{\frac{1}{2}x+2} dy \right) dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx + \int_2^5 \frac{3}{2} dx + \int_5^6 \left(-\frac{3}{2}x + 9 \right) dx \\ &= \frac{3}{2} \left(\left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 + \left[x \right]_2^5 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_5^6 \right) = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6. \end{aligned}$$

Pour calculer l'aire de D par un changement de variable, il est utile de ré-exprimer les équations des droites comme suit : $2x - y = 1$, $2x - y = 7$ et $x - 2y = -1$, $x - 2y = -4$. On définit alors une application H telle que $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$\begin{cases} u = 2x - y = H_1(x, y) \\ v = x - 2y = H_2(x, y) \end{cases}$$

et on voit que l'image de D par H est $\tilde{D} = [1, 7] \times [-4, -1]$, c'est-à-dire $H: D \rightarrow \tilde{D}$.

Le matrice Jacobienne de H et son Jacobien sont

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(J_H(x, y)) = -3.$$

Soit $G = H^{-1}: \tilde{D} \rightarrow D$ la transformation inverse telle que $(x, y) = G(u, v)$. Le Jacobien de G se calcule à partir de $J_H(x, y)$:

$$\det(J_G(u, v)) = \left[\frac{1}{\det(J_H(x, y))} \right]_{(x,y)=G(u,v)} = -\frac{1}{3}.$$

L'aire du parallélogramme est alors

$$\int_D dx dy = \int_{\tilde{D}} |\det(J_G(u, v))| du dv = \int_1^7 \left(\int_{-4}^{-1} \frac{1}{3} du \right) dv = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 = 6.$$

Le résultat est évidemment le même qu'avant. Mais on a vu qu'il est plus rapide d'utiliser un changement de variables adéquat.

Exercice 7.

i) Le domaine D est représenté à la Fig. 10. Pour le changement de variables, on définit l'application $H: D \rightarrow \tilde{D}$ telle que $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 = H_1(x, y) \\ v = x^2 - y^2 = H_2(x, y) \end{cases}$$

Il suit de la définition de D que $\tilde{D} = [5, 9] \times [1, 4]$. La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

et son Jacobien est $\det(J_H(x, y)) = -8xy$.

Soit $G = H^{-1}: \tilde{D} \rightarrow D$ la transformation inverse telle que $(x, y) = G(u, v)$. Pour calculer l'intégrale, on a besoin du Jacobien de G qui est

$$\det(J_G(u, v)) = \left[\frac{1}{\det(J_H(x, y))} \right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[-\frac{1}{8xy} \right]_{(x,y)=G(u,v)}$$

Comme $xy \neq 0$ sur D , le jacobien de G est bien définie. L'intégrale est donc

$$\begin{aligned} \int_D x^3 y^3 dx dy &= \int_{\tilde{D}} \left[x^3 y^3 \right]_{(x,y)=G(u,v)} \cdot |\det(J_G(u, v))| du dv \\ &= \int_{\tilde{D}} \left[x^3 y^3 \cdot \frac{1}{8xy} \right]_{(x,y)=G(u,v)} du dv = \frac{1}{8} \int_{\tilde{D}} \left[x^2 y^2 \right]_{(x,y)=G(u,v)} du dv. \end{aligned}$$

Pour exprimer x et y en fonction de u et v , observons que $2x^2 = u + v$ et $2y^2 = u - v$. Ainsi

$$x^2 y^2 = \frac{1}{4}(u + v)(u - v) = \frac{1}{4}(u^2 - v^2)$$

et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int_D x^3 y^3 dx dy &= \frac{1}{32} \int_1^4 \left(\int_5^9 (u^2 - v^2) du \right) dv = \frac{1}{32} \int_1^4 \left[\frac{1}{3} u^3 - uv^2 \right]_{u=5}^{u=9} dv \\ &= \frac{1}{32} \int_1^4 \left(\frac{9^3 - 5^3}{3} - 4v^2 \right) dv = \frac{1}{24} \int_1^4 (151 - 3v^2) dv \\ &= \frac{1}{24} \left[151v - v^3 \right]_1^4 = \frac{390}{24} = \frac{65}{4}. \end{aligned}$$

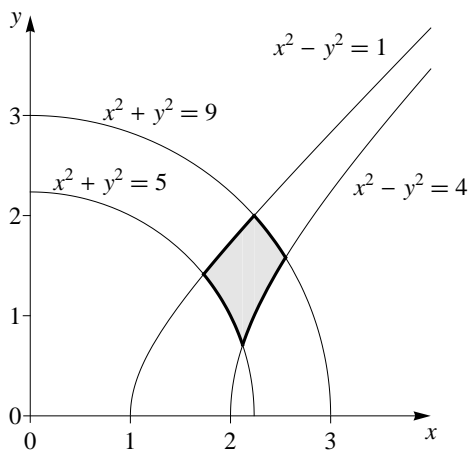


Fig. 10

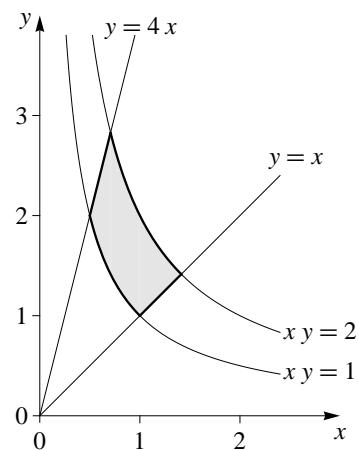


Fig. 11

ii) Le domaine D se trouve dans le premier quadrant (car $x, y \geq 0$) et est délimité d'une part par les droites $y = x$ et $y = 4x$ et d'autre part par les courbes $xy = 1$ et $xy = 2$ (cf. Fig. 11).

Pour calculer l'intégrale on définit le changement de variable $H: D \rightarrow \tilde{D}$, où $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$\begin{cases} u = xy = H_1(x, y) \\ v = \frac{y}{x} = H_2(x, y) \end{cases}$$

et, par définition de D , $\tilde{D} = [1, 2] \times [1, 4]$. La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

et son Jacobien est $\det(J_H(x, y)) = 2\frac{y}{x}$ qui est bien défini sur D car $x \neq 0$.

Soit $G = H^{-1}: \tilde{D} \rightarrow D$ la transformation inverse telle que $(x, y) = G(u, v)$. Le Jacobien de G est alors

$$\det(J_G(u, v)) = \left[\frac{1}{\det(J_H(x, y))} \right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[\frac{x}{2y} \right]_{(x,y)=G(u,v)} = \frac{1}{2v}$$

car $v = \frac{y}{x}$. Comme $v > 0$ sur \tilde{D} , ce Jacobien est bien défini. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_D x^2 y^2 dx dy &= \int_1^4 \left(\int_1^2 \frac{u^2}{2v} du \right) dv = \int_1^4 \frac{1}{2v} \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_{u=1}^{u=2} dv = \int_1^4 \frac{7}{6} \frac{1}{v} dv \\ &= \frac{7}{6} \left[\ln(v) \right]_1^4 = \frac{7}{6} \ln(4) = \frac{7}{3} \ln(2). \end{aligned}$$

Exercice 8.

On introduit des nouvelles coordonnées par l'application $H: D \rightarrow \tilde{D}$ telle que $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{D} = [3, 4] \times [1, 2].$$

La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix},$$

et son Jacobien est $\det(J_H(x, y)) = -8xy$. Soit l'application inverse $G = H^{-1}$. On a

$$|\det(J_G(u, v))| = \left[\frac{1}{|\det(J_H(x, y))|} \right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[\frac{1}{8xy} \right]_{(x,y)=G(u,v)}.$$

Comme $xy > 0$ pour $(x, y) \in D$, le jacobien de G est bien défini.

Dans les nouvelles coordonnées on a

$$\begin{aligned} I &= \int_D (x^5 y + y^5 x) dx dy = \int_{\tilde{D}} \left[(x^5 y + y^5 x) \right]_{(x,y)=G(u,v)} \cdot |\det(J_G(u, v))| du dv \\ &= \int_{\tilde{D}} \left[(x^5 y + y^5 x) \cdot \frac{1}{8xy} \right]_{(x,y)=G(u,v)} du dv \\ &= \frac{1}{8} \int_{\tilde{D}} \left[x^4 + y^4 \right]_{(x,y)=G(u,v)} du dv \end{aligned}$$

On a $u^2 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2 y^2 + y^4$ et $v^2 = (x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2 y^2 + y^4$ et donc

$$x^4 + y^4 = \frac{1}{2} (u^2 + v^2).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{16} \int_1^2 \left(\int_3^4 (u^2 + v^2) du \right) dv = \frac{1}{16} \int_1^2 \left[\frac{1}{3} u^3 + uv^2 \right]_{u=3}^{u=4} dv = \frac{1}{16} \int_1^2 \left(\frac{4^3 - 3^3}{3} + v^2 \right) dv \\ &= \frac{1}{48} \left[37v + v^3 \right]_1^2 = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Analyse avancée II – Corrigé de la Série 14A

Échauffement.

En coordonnées sphériques: Voir le cours.

En coordonnées cylindriques: Voir le cours pour trouver l'intégrale. Ensuite on la calcule :

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-R}^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r \, dr \right) dz = 2\pi \int_{-R}^R \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} dz = 2\pi \int_{-R}^R \frac{R^2 - z^2}{2} dz \\ &= 2\pi \left[\frac{R^2 z}{2} - \frac{z^3}{6} \right]_{z=-R}^{z=R} = 2\pi \left(\frac{R^3}{3} - \left(-\frac{R^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 1.

Le volume cherché V est donné par une intégrale triple sur le domaine représenté à la Fig. 1 ci-dessous. Observons que le domaine est défini par les inégalités suivantes :

$$x^2 + z^2 \leq 1, \quad x + y + z \geq 1, \quad 2y - z \leq 6 \quad \text{et} \quad z \geq 0.$$

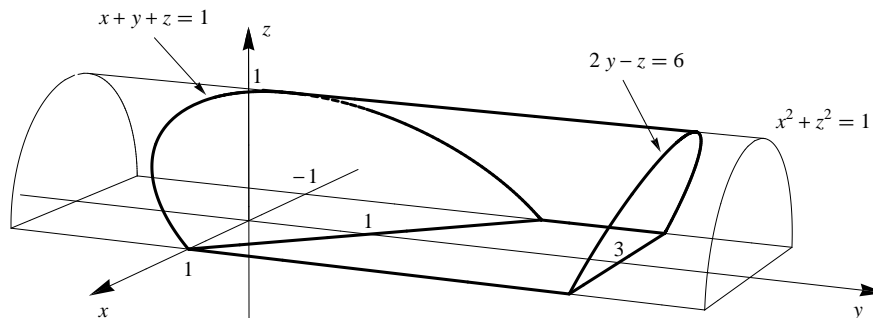


Fig. 1

A partir de ces contraintes (et en regardant la Fig. 1), on trouve que les bornes de l'intégrale triple sont

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad 1 - x - z \leq y \leq 3 + \frac{z}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{1-x-z}^{3+\frac{z}{2}} dy \right) dz \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(3 + \frac{z}{2} - (1-x-z) \right) dz \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(2+x + \frac{3}{2}z \right) dz \right) dx = \int_{-1}^1 \left[(2+x)z + \frac{3}{4}z^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left((2+x)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4}(1-x^2) \right) dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est justifiée par le fait que la fonction $x\sqrt{1-x^2}$ est impaire et donc son intégrale entre -1 et 1 est nulle.

Pour la première intégrale, on pose le changement de variable $x = \varphi(t) = \sin(t)$ si bien que $\varphi'(t) = \cos(t)$ et la nouvelle variable t varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On trouve alors

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varphi(t)^2} \cdot \varphi'(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 dt$$

qu'on intègre par parties avec $f'(t) = g(t) = \cos(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 dt &= \left[\sin(t) \cos(t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2 dt = 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(t)^2) dt \\ &= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 dt = \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$V = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \pi + \frac{3}{4} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \pi + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \pi + 1.$$

Exercice 2.

On utilise les coordonnées cylindriques (r, φ, z) définies par $G : \tilde{D} \rightarrow D$ telle que

$$(x, y, z) = G(r, \varphi, z) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z).$$

Le Jacobien est donc

$$J_G(r, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Les équations du cône $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}z - 3\right)^2$ et de la sphère $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ s'écrivent en coordonnées cylindriques comme $r^2 = \left(\frac{1}{2}z - 3\right)^2$ et $r^2 + (z-1)^2 = 25$. A l'extérieur du cône on a alors $r^2 \geq \left(\frac{1}{2}z - 3\right)^2$ et à l'intérieur de la sphère on a $r^2 + (z-1)^2 \leq 25$. En combinant ces deux équations on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}z - 3\right)^2 + (z-1)^2 \leq 25 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}z^2 - 3z + 9 + z^2 - 2z + 1 \leq 25 \Leftrightarrow \frac{5}{4}z^2 - 5z - 15 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 4z - 12 \leq 0 \Leftrightarrow (z+2)(z-6) \leq 0 \Leftrightarrow z \geq -2 \quad \text{et} \quad z \leq 6. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\tilde{D} = \left\{ (r, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 3 - \frac{1}{2}z \leq r \leq \sqrt{25 - (z-1)^2}, -2 \leq z \leq 6 \right\}$$

et le volume est donc

$$\begin{aligned}
 \int_D dx dy dz &= \int_{\tilde{D}} |J_G(r, \varphi, z)| dr d\varphi dz = \int_{-2}^6 \left(\int_{3-\frac{z}{2}}^{\sqrt{25-(z-1)^2}} \left(\int_0^{2\pi} r d\varphi \right) dr \right) dz \\
 &= 2\pi \int_{-2}^6 \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{3-\frac{z}{2}}^{\sqrt{25-(z-1)^2}} dz = \pi \int_{-2}^6 \left(15 + 5z - \frac{5}{4} z^2 \right) dz \\
 &= 5\pi \left[3z + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{12} z^3 \right]_{-2}^6 = 5\pi \left(24 + 16 - \frac{56}{3} \right) = \frac{320\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Comme illustration, l'intersection de D avec le plan $x = 0$ est représentée à la Fig. 2.

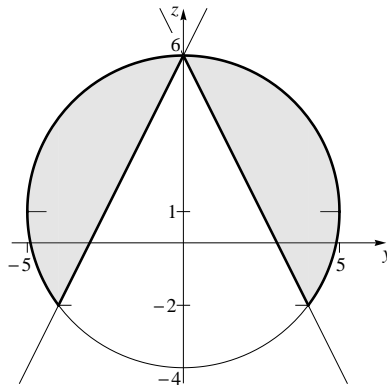


Fig. 2

Exercice 3.

La masse totale du domaine D est donnée par l'intégrale triple

$$I = \int_D \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Le domaine est donné par les inégalités

$$0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 1 \quad \text{et} \quad y \leq z \leq 1,$$

et l'intégrale triple peut donc être exprimée par des intégrales itérées

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \left(\int_y^1 z^{7/2} e^{-y^{3/2} z^{3/2}} dz \right) dy \right) dx.$$

Pour faciliter l'intégration, on change l'ordre d'intégration. Il faut donc récrire les inégalités en changeant le sens de parcours des régions définies par les deux dernières inégalités (cf. Fig. 3).

Les nouvelles inégalités décrivant le domaine D sont

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq y \leq z \quad \text{et} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{y}.$$

L'intégrale triple peut donc aussi être exprimée en terme des intégrales itérées suivantes :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{y}} z^{7/2} e^{-y^{3/2} z^{3/2}} dx \right) dy \right) dz.$$

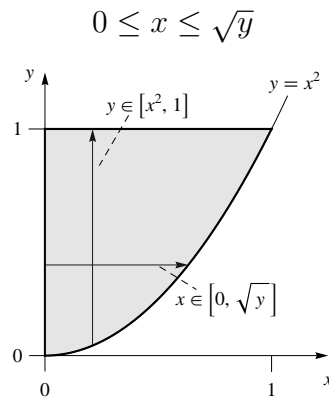


Fig. 3

On a successivement

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^z \left[z^{7/2} e^{-y^{3/2} z^{3/2}} x \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^z z^{7/2} e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \sqrt{y} dy \right) dz \\
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^z z^{7/2} \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{z^{3/2}} \right) \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{2} z^{3/2} y^{1/2} \right) e^{-y^{3/2} z^{3/2}}}_{=\varphi'(y) \exp(\varphi(y))} dy \right) dz \\
 &= \int_0^1 \left[-\frac{2}{3} \frac{1}{z^{3/2}} \left(z^{7/2} e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \right) \right]_{y=0}^{y=z} dz = -\frac{2}{3} \int_0^1 \left[z^2 e^{-y^{3/2} z^{3/2}} \right]_{y=0}^{y=z} dz \\
 &= -\frac{2}{3} \int_0^1 \left(z^2 e^{-z^3} - z^2 \right) dz
 \end{aligned}$$

et donc

$$I = -\frac{2}{3} \int_0^1 \left(z^2 e^{-z^3} - z^2 \right) dz = -\frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3} e^{-z^3} - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^1 = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{9e} .$$

Exercice 4.

Des coordonnées indiquées sur la Fig. 2 de l'énoncé on déduit que le haut du domaine (partie grise sur la Fig. 4 ci-dessous) appartient au plan d'équation $y + 2z = 2$.

Ainsi les bornes du domaine D sont

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq \frac{2-y}{2} .$$

La masse totale I est donc

$$\begin{aligned}
 I &= \int_D \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^2 dz \right) dy \right) dx \\
 &= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^2 dx \right) = 2 \left(\int_0^2 (2-y) dy \right) \left(\int_0^1 x^2 dx \right) \\
 &= 2 \cdot \left[2y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^2 \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} .
 \end{aligned}$$

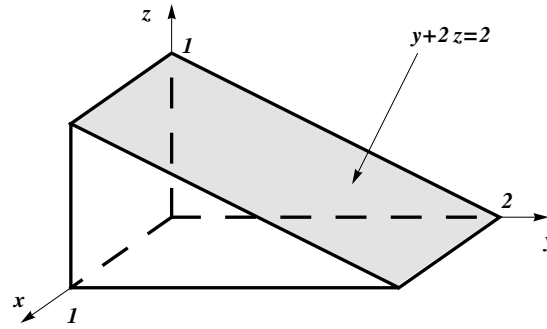


Fig. 4

Le centre de gravité est alors $G = (\frac{I_1}{T}, \frac{I_2}{T}, \frac{I_3}{T})$, où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_D x \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^3 \, dz \right) dy \right) dx \\ &= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^3 \, dx \right) = 4 \cdot \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_D y \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^2 y \, dz \right) dy \right) dx \\ &= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} y \, dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^2 \, dx \right) = 2 \left(\int_0^2 y(2-y) \, dy \right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= 2 \cdot \left[y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^2 \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_D z \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} 4x^2 z \, dz \right) dy \right) dx \\ &= 4 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{(2-y)/2} z \, dz \right) dy \right) \left(\int_0^1 x^2 \, dx \right) = 4 \left(\int_0^2 \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{(2-y)/2} dy \right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 (2-y)^2 \, dy \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} (2-y)^3 \right]_0^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Ainsi le centre de gravité est $G = (\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Exercice 5.

Soit D le secteur sphérique représenté à la Fig. 3 de l'énoncé. Comme le domaine D est un secteur sphérique, on utilise les coordonnées sphériques $G : \tilde{D} \rightarrow D$ telles que

$$(x, y, z) = G(r, \theta, \varphi) = (r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta))$$

et donc le Jacobien de ce changement de coordonnées est

$$J_G(r, \theta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin(\theta).$$

Sur la Fig. 3 de l'énoncé on voit que le domaine d'intégration \tilde{D} est défini par

$$0 \leq r \leq 2, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Comme la densité de masse est proportionnelle à la distance à l'origine (notons qu'une éventuelle constante de proportionnalité s'annule dans le calcul du centre de gravité), elle est $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et son analogue exprimé en coordonnées sphériques est $\bar{\rho}(r, \theta, \varphi) = r$. On calcule d'abord la masse totale I du domaine

$$\begin{aligned} I &= \int_D \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_{\tilde{D}} \bar{\rho}(r, \theta, \varphi) |J_G(r, \theta, \varphi)| dr d\theta d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 r^3 \sin(\theta) dr \right) d\theta \right) d\varphi = \left(\int_0^2 r^3 dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta) d\theta \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \right) \\ &= \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^2 \cdot \left[-\cos(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \pi = 2\pi(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Notons que $\sin(\theta) \geq 0$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et donc $|J_G(r, \theta, \varphi)| = r^2 \sin(\theta)$ (sans valeur absolue). La coordonnée z_G du centre de gravité de D est alors

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{I} \int_D z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{I} \int_{\tilde{D}} z(r, \theta, \varphi) \bar{\rho}(r, \theta, \varphi) |J_G(r, \theta, \varphi)| dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{I} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 r \cos(\theta) \cdot r^3 \sin(\theta) dr \right) d\theta \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{I} \left(\int_0^2 r^4 dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \right) = \frac{1}{I} \cdot \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \sin(\theta)^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \pi \\ &= \frac{1}{I} \cdot \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{1}{2\pi(2 - \sqrt{2})} \cdot \frac{8\pi}{5} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{5}. \end{aligned}$$

Exercice 6.

La construction du tore D implique que son grand rayon est a et son petit rayon est b . Pour intégrer sur D on utilise les coordonnées curvilignes (t, β, φ) définies par $G : \tilde{D} \rightarrow D$ telles que

$$(x, y, z) = G(t, \beta, \varphi) = ((a + t \cos(\beta)) \cos(\varphi), (a + t \cos(\beta)) \sin(\varphi), t \sin(\beta)) \quad (\text{Fig. 5})$$

Le Jacobien de ce changement de coordonnées est

$$J_G(t, \beta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cos(\varphi) & -t \sin(\beta) \cos(\varphi) & -(a + t \cos(\beta)) \sin(\varphi) \\ \cos(\beta) \sin(\varphi) & -t \sin(\beta) \sin(\varphi) & (a + t \cos(\beta)) \cos(\varphi) \\ \sin(\beta) & t \cos(\beta) & 0 \end{pmatrix} = -t(a + t \cos(\beta))$$

et on a $|J_G(t, \beta, \varphi)| = t(a + t \cos(\beta))$ parce que $a > t$ et donc le terme dans la parenthèse est positif. Puisque

$$\tilde{D} = \{(t, \beta, \varphi) : 0 \leq t \leq b, 0 \leq \beta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

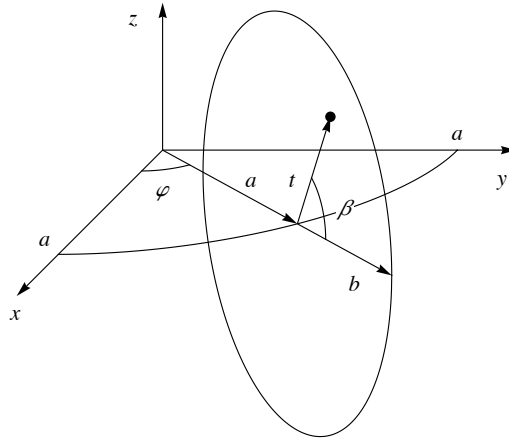


Fig. 5

l'intégrale devient

$$\begin{aligned}
 I &= \int_D z^2 dx dy dz = \int_{\tilde{D}} z(t, \beta, \varphi)^2 |J_G(t, \beta, \varphi)| dt d\beta d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^b (t \sin(\beta))^2 \cdot t(a + t \cos(\beta)) dt \right) d\beta \right) d\varphi \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} \left(\sin(\beta)^2 \int_0^b (at^3 + t^4 \cos(\beta)) dt \right) d\beta \right) \\
 &= 2\pi \int_0^{2\pi} \sin(\beta)^2 \left(\frac{1}{4}ab^4 + \frac{1}{5}b^5 \cos(\beta) \right) d\beta \\
 &= \frac{\pi}{2}ab^4 \int_0^{2\pi} \sin(\beta)^2 d\beta + \frac{2\pi}{5}b^5 \int_0^{2\pi} \sin(\beta)^2 \cos(\beta) d\beta \\
 &= \frac{\pi}{2}ab^4 \int_0^{2\pi} \sin(\beta)^2 d\beta + \frac{2\pi}{5}b^5 \left[\frac{1}{3} \sin(\beta)^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}ab^4 \int_0^{2\pi} \sin(\beta)^2 d\beta.
 \end{aligned}$$

En intégrant la dernière intégrale par parties on trouve

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sin(\beta)^2 d\beta &= \left[-\cos(\beta) \sin(\beta) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(\beta)^2 d\beta = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin(\beta)^2 d\beta \\
 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(\beta)^2 d\beta &= \pi
 \end{aligned}$$

et donc $I = \frac{\pi^2 ab^4}{2}$.

Exercice 7. (Exponentielle d'une matrice)

i) On peut écrire $A = I + N$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente. En effet $N^2 = 0$. Il s'ensuit que $A^2 = I + 2N$ et par récurrence on peut prouver que $A^k = I + kN$. Prenant $x \in \mathbb{R}$ on a, par la définition d'exponentielle de matrice,

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Ax)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (I + kN) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} I + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} N$$

$$=e^x I + xe^x N = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

ii) On résout l'exercice avec deux méthodes différentes.

Méthode 1: Par l'exponentielle d'une matrice.

Vu que la matrice e^{Ax} satisfait l'équation $(e^{Ax})' = Ae^{Ax}$ alors la solution du problème est donnée par $y(x) = e^{Ax} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x + xe^x \\ e^x \end{pmatrix}$.

Méthode 2: L'équation à résoudre peut être écrite

$$y_1' = y_1 + y_2$$

$$y_2' = y_2$$

et donc y_2 est indépendante de y_1 et on trouve facilement $y_2(x) = y_2(0)e^x = e^x$. En utilisant ceci dans l'équation pour y_1 on a $y_1' - y_1 = e^x$. Utilisant la méthode des coefficients indéterminés on trouve $y_1(x) = Ce^x + xe^x$ et avec la condition initiale $y_1(0) = 1$ on trouve $C = 1$, donc $y_1(x) = e^x + xe^x$.