



# Information, Calcul et Communication

## Compléments de cours

J.-C. Chappelier

## Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2018 Q1.4

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \operatorname{sinc}(30t - m)$$

où  $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$  et  $a_m = 7 \sin\left(\frac{2\pi}{3}m + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \sin\left(\frac{4\pi}{5}m + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(\frac{2\pi}{6}m\right)$ .

Écrire  $f(t)$  comme la somme de trois fonctions sinus :

Voyons  $a_m$  comme les échantillons d'un signal  $g(t)$  échantillonné à  $f_e = 30$  Hz (le coefficient de  $t$  dans le sinc) : c.-à-d. que l'on veut écrire  $a_m = g(m T_e) = g\left(\frac{m}{f_e}\right)$ , avec donc

$$g(t) = 7 \sin\left(2\pi \frac{f_e}{3} t + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \sin\left(2\pi \frac{2f_e}{5} t + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(2\pi \frac{f_e}{6} t\right)$$

$\frac{f_e}{2}$  étant strictement supérieure à La bande passante de  $g$  ( qui est  $\frac{2f_e}{5}$ ),  $g$  sera reconstruite parfaitement par la formule de reconstruction, et on a donc pour tout  $t$ ,  $f(t) = g(t)$ , c.-à-d. :

$$f(t) = 7 \sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \sin\left(24\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin(10\pi t)$$

## Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q6

Soit  $X$  le signal défini par :

$$X(t) = \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(30\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin(12\pi t).$$

$X$  est filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $f_c = 12$  Hz, puis échantillonné à une fréquence  $f_e = 14$  Hz.

À partir de ces échantillons, on reconstruit le signal  $Y$  en utilisant la formule de reconstruction vue en cours.

Quelle est la forme mathématique du signal  $Y(t)$  ?

$$Y(t) = \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin(12\pi t)$$

## Leçons II.1 et II.2 – Examen final 2017 Q13

Un enfant de vos connaissances veut enregistrer, et envoyer par message, un chant à sa grand-mère.

Fort(e) de vos connaissances en ICC, vous l'aidez à construire une transmission optimale. Sachant que sa voix se situe entre 1000 et 3500 Hz (au dessus il n'y a que du bruit) et que pour des raisons techniques, il n'est pas possible d'acquérir plus que 8000 échantillons par seconde, quelle procédure lui conseillez-vous :

- ▶ filtrage (passe-bas) : oui ou non ? **oui** (nécessaire si l'on ne veut pas avoir de « repliement de spectre » du bruit)
- ▶ Si oui :
  - ▶ avant ou après échantillonnage ? **avant**
  - ▶ avec quelle fréquence de coupure ? **un peu au dessus (mais assez proche) de 3500 Hz**
- ▶ À quelle fréquence conseillez-vous d'échantillonner ? Pourquoi ? **un peu au dessus de 2 fois la fréquence de coupure, ou, si possible à 8000 Hz**
- ▶ Le chant pourra-t-il être correctement reconstruit à l'arrivée ? Pourquoi ? **oui tant que les choix faits respectent  $f_e > 2f_c$**

## Leçons II.1 et II.2 – Mix Examens 2015–2016

Soit  $X(t)$  un signal quelconque défini sur  $\mathbb{R}$ , de bande passante  $f_{\max}$ , et soit  $X_I(t)$  sa reconstruction (suivant la formule du cours) après échantillonnage à une fréquence  $f_e = 1/T_e$ .

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

- \*A]  $\forall f_e \geq 3f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$
- B]  $\forall f_e 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$
- C]  $\forall f_e 0 < f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) \neq X(t)$
- \*D]  $\forall f_e 0 < f_e < 2f_{\max} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad X_I(nT_e) = X(nT_e)$
- \*E] Si  $f_e = 2f_{\max}$ , il est possible que  $\forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

## Leçon II.3 (entropie) – Points clés

- ▶ compression sans perte / compression avec perte
- ▶ définition (formelle) de l'entropie
- ▶ (quatre) propriétés de l'entropie
- ▶ algorithme (de compression) de Shannon-Fano

## Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Soit un entier naturel codé sur 32 bits. L'entropie de ce nombre peut-elle être changée si on :

- ▶ inverse tous ses bits ? **non**
- ▶ lui additionne le nombre 1 ? **oui**
- ▶ prend l'opposé ? **oui**
- ▶ fait une permutation circulaire de tous ses bits ? **non**

## Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Considérons la séquence  $X = \ll \text{HUBERT QUEL HURLUBERLU} \gg$  (sans les espaces).  
Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

**A]**  $H(X) = -2.82 \text{ bit}$

**B]**  $H(X) \geq 8 \text{ bit}$

**\*C]**  $H(X) \leq 4 \text{ bit}$

**D]**  $H(X) = 3.1 \text{ bit}$

Homework : calculez  $H(X)$



## Leçon II.3 (entropie) – Étude de cas

Soient  $H_V$  l'entropie des voyelles d'un jeu de Scrabble et  $H_C$  celle des consonnes ;  
 $m = \min(H_V, H_C)$  et  $M = \max(H_V, H_C)$ .

L'entropie  $H_L$  de toutes les lettres de ce jeu de Scrabble vérifie :

**A]**  $m \leq H_L \leq M$       **B]**  $H_L = \frac{H_V + H_C}{2}$       **\*C]**  $m \leq H_L \leq M + 1$       **D]**  $H_L \leq M$

Démonstration ?

Soient  $N_V$  le nombre de voyelles,  $N_C$  le nombre de consonnes et  $N = N_V + N_C$  le nombre total de lettres.

Notons aussi  $n_x$  le nombre d'occurrences d'une lettre  $x$ .

Soit enfin  $p = \frac{N_V}{N}$  (et donc  $1 - p = \frac{N_C}{N}$ ).

# Démonstration

$$\begin{aligned}H_L &= - \sum_{\text{lettres}} p_{\text{lettre}} \log(p_{\text{lettre}}) \\&= - \sum_{\text{voyelles}} \frac{n_V}{N} \log\left(\frac{n_V}{N}\right) - \sum_{\text{consonnes}} \frac{n_C}{N} \log\left(\frac{n_C}{N}\right) \\&= -p \sum_{\text{voyelles}} \frac{n_V}{N_V} \log\left(p \frac{n_V}{N_V}\right) - (1-p) \sum_{\text{consonnes}} \frac{n_C}{N} \log\left((1-p) \frac{n_C}{N_C}\right) \\&= -p \sum_{\text{voyelles}} \frac{n_V}{N_V} \log\left(\frac{n_V}{N_V}\right) - p \log(p) \left( \sum_{\text{voyelles}} \frac{n_V}{N_V} \right) \\&\quad - (1-p) \sum_{\text{consonnes}} \frac{n_C}{N_C} \log\left(\frac{n_C}{N_C}\right) - (1-p) \log(1-p) \left( \sum_{\text{consonnes}} \frac{n_C}{N_C} \right) \\&= pH_V + (1-p)H_C + h(p)\end{aligned}$$

avec  $h(p) = -p \log(p) - (1-p) \log(1-p)$  l'entropie d'un choix binaire de probabilité  $p$ .  
( $h(p)$  varie entre 0 et 1)