Ens. S. Friedli - Analyse I - (n/a)

14 janvier 2019 - durée : 3 heures

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  $+3$ points si la réponse est correcte,

  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,

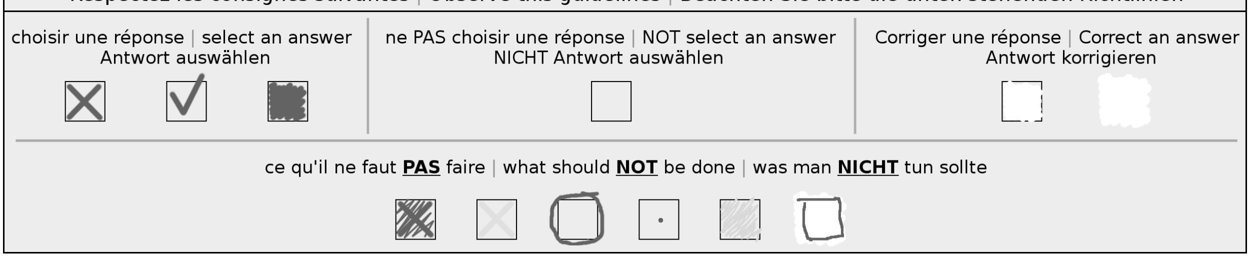
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

  $+1$ point si la réponse est correcte,

  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,

  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : L'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_{0^+}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,\mathrm{d}x$

- ☐ converge, et sa valeur est $I = \sqrt{2}$
- ☐ diverge, car $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Log}\big(\sqrt{\sin(\varepsilon)}\,\big) = -\infty$
- ☐ diverge, car $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ n'est pas définie en $x = 0$
- ☐ converge, et sa valeur est $I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(\frac{1}{2})$

Question 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\,|\cos(x)|$. Alors :

- ☐ f n'est pas deux fois dérivable en $x = 0$
- ☐ f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$
- ☐ f est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en $x = 0$
- ☐ f est dérivable en $x = 0$, mais pas en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Question 3 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}}$. Alors :

- ☐ f possède un seul point de maximum local dans $\mathbb{R}$
- ☐ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- ☐ f possède un seul point de minimum local dans $\mathbb{R}$
- ☐ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Question 4 : Soit $\lambda = -\frac{1}{6}$. Déterminer, parmi les séries ci-dessous, celle qui converge.

☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\Big)^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^n}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-\lambda^2}\Big)^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$

Question 5 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8a_n - 7}$. Alors :

- ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ la suite est divergente
- ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

Question 6 : Soit $m \in \mathbb{R}$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{\mathrm{Log}\big(1+2x^2\big)} & \text{si } x < 0\,, \\ m & \text{si } x = 0\,, \\ \dfrac{x+1}{x^2+3x+1} & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

- ☐ Si $m = 1$, alors f est continue en $x = 0$.
- ☐ Si $m = \frac{1}{3}$, f est continue à droite mais pas à gauche en $x = 0$.
- ☐ Si $m = \frac{1}{2}$, alors f est continue en $x = 0$.
- ☐ Si $m = \frac{1}{2}$, alors f est continue à gauche mais pas à droite en $x = 0$.

Question 7 : Soit l'intégrale définie $I = \int_2^3 \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$. Alors :

- [ ] $I = \frac{5}{3} - 4\,\mathrm{Log}(\frac{3}{2})$
- [ ] $I = 2\,\mathrm{Log}(2) + 1$
- [ ] $I = \mathrm{Log}(2) + \frac{1}{2}$
- [ ] $I = \frac{4}{3} - 4\,\mathrm{Log}(\frac{4}{3})$

Question 8 : Soit $f :]-3,2[\ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Alors pour tous les $x \in]-3,2[$ et $y \in]-3,2[$, tels que $x \neq y$, on a:

- [ ] $-3 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 7$
- [ ] $-2 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 8$
- [ ] $-4 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 6$
- [ ] $-1 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 9$

Question 9 : Soit $p \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x|^p\,\mathrm{Log}(|x|) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

- [ ] Si $p = \frac{6}{5}$, alors f est dérivable en $x = 0$.
- [ ] Si $p = \frac{3}{2}$, alors f n'est pas dérivable en $x = 0$.
- [ ] Si $p = \frac{1}{2}$, alors f n'est pas continue en $x = 0$.
- [ ] Si $p = \frac{2}{3}$, alors f est continue à droite en $x = 0$, mais pas à gauche.

Question 10 : Soit S l'ensemble des solutions de l'équation complexe $\overline{z}^2 = z^2$. Alors :

- [ ] $S = \mathbb{R}$
- [ ] $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ ou } \mathrm{Im}(z) = 0\}$
- [ ] $S = \{-1, +1, -\mathrm{i}, +\mathrm{i}\}$
- [ ] $S = \emptyset$

Question 11 : Soit s un paramètre réel, et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $b_n = \dfrac{1}{n^s}$ si n est pair, $b_n = \dfrac{1}{n^{2s}}$ si n est impair. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si et seulement si

- [ ] $s > 2$
- [ ] $s > \frac{1}{2}$
- [ ] $s > 1$
- [ ] $s > 0$

Question 12 : Le polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-\sin(x)}$ est

- [ ] $1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4$
- [ ] $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$
- [ ] $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$
- [ ] $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4$

Question 13 : Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \sqrt[n]{7}$ si n est pair et $x_n = \dfrac{1}{n^7}$ si n est impair. Alors :

- [ ] $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$
- [ ] $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
- [ ] $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
- [ ] $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

Question 14 : Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4}{2+3x}$. La série de Taylor de f autour de $x = 2$ est:

- ☐ $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\tfrac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in \left]1, 3\right[$
- ☐ $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right[$
- ☐ $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\tfrac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right[$
- ☐ $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{3}{8}\right)^k (x+2)^k$ pour $x \in \left]-\frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right[$

Question 15 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$. Alors :

- ☐ $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
- ☐ $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Question 16 : Soit l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$. Alors :

- ☐ $I = \sqrt{3} - 1 + \mathrm{Log}(2)$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Arctg}(3) - \frac{\pi}{4}\right)$
- ☐ $I = 2\left(\sqrt{3} - 1\right) + \mathrm{Log}(2)$
- ☐ $I = 2\left(\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$

Question 17 : Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A = \left\{x > 0 \,:\, \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0\right\}$. Alors :

- ☐ $\mathrm{Inf}\, A = 0$
- ☐ $\mathrm{Inf}\, A = \dfrac{2}{\pi}$
- ☐ $\mathrm{Sup}\, A = 0$
- ☐ $\mathrm{Sup}\, A = \dfrac{\pi}{2}$

Question 18 : Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \dfrac{2^{2n}}{(7n)!}$. Lorsque $n \to \infty$, cette suite

- ☐ converge vers 0
- ☐ diverge
- ☐ converge vers $\dfrac{4}{7}$
- ☐ converge vers $\dfrac{\mathrm{Log}\,(2)}{7}$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^5 dont le développement limité d'ordre 4 en $x = 0$ est donné par

$$f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x),$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors $f'(0) + 3f^{(2)}(0) + f^{(3)}(0) = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 2$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = x_{n-1} - \dfrac{1}{n}$. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : La série entière $\displaystyle\sum_{k=100}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f\colon [-2, 20] \to [0, 1]$ une fonction continue. Alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : La série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que l'équation $f'(x) = 0$ possède exactement une solution. Alors l'équation $f(x) = 1$ possède au plus deux solutions réelles distinctes.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné, et $B = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ est un majorant de } A\}$. Alors $\operatorname{Inf} B \in B$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $z \neq 0$ un nombre complexe dont l'argument vaut $\frac{\pi}{4}$. Alors l'argument du nombre complexe $\frac{1}{z^2}$ vaut $-\frac{\pi}{2}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : La fonction $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_0^{|x|} 1 \, \mathrm{d}t$ est dérivable en $x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Alors f est strictement monotone.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

Soit

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2x - 2}.$$

(a) Montrer que $f(x)$ est bien définie en tout point $x \in [1, 3]$.

(b) Calculer les extrema globaux de f sur l'intervalle $[1, 3]$, en détaillant les étapes de votre raisonnement.

Question 30: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 *Réservé au correcteur*

Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,2]$, dérivable sur $]0,2[$, telle que $f(0) = 1$, et telle que $f'(x) \leq -1$ pour tout $x \in]0,2[$. Montrer qu'il existe $x_* \in]0,2[$ tel que $f(x_*) = 0$.

(*Attention:* si on utilise des théorèmes vus au cours, on les énoncera, et on expliquera pourquoi ils s'appliquent dans ce cas.)

Question 31: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 *Réservé au correcteur*

(a) Soit f une fonction réelle définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Donner la définition rigoureuse de l'expression suivante:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.$$

(b) Soit $f(x) = 5x + 1$. Montrer, à l'aide de la définition donnée au point précédent, et en justifiant toutes les étapes de votre raisonnement, que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 11\,.$$