Peter Wittwer

12 avril 2024

Analyse avancée II – Série 6B

Échauffement. (Produits scalaires et normes induites)
Un produit scalaire $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ sur un espace vectoriel réel V est une fonction de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$, qui satisfait :

i) *(symétrie)* $\forall u, v \in V$, $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

ii) *(bi-linéarité)* $\forall u, v, w \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$.

iii) *(positivité)* $\forall u \in V$, $\langle u, u\rangle \geq 0$ et $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Montrer que la fonction $\|\ \|\colon V \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u\| := \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ définie une norme sur V. Cette norme est appelée la norme induite par le produit scalaire.

Exercice 1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit V un espace vectoriel, $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ un produit scalaire et $\|\ \|$ la norme induite. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$.

Exercice 2. (Espaces métriques)
Soit V un espace vectoriel et $\|\ \|$ une norme sur V. Montrer que la fonction $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto d(u, v) := \dfrac{\|u - v\|}{1 + \|u - v\|}$, définie une distance sur V.

Exercice 3. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$)
Soit $X := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 > 1\big\} \cup \{(0, 0)\}$. Donner explicitement les ensembles suivants : $\mathring{X}$, $\overline{X}$, ∂X, l'ensemble des points isolés de X et l'ensemble des points d'accumulation de X. Justifier vos réponses à partir des définitions.

Exercice 4. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$)
Soient les ensembles suivants :

$$
\begin{aligned}
&\Omega_1 := \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\Big\}\,,\\
&\Omega_2 := \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon x_1^2 - x_2^2 = 1\Big\}\,,\\
&\Omega_3 := \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x_1 < 1,\ \sin\big(\tfrac{1}{x_1}\big) < x_2 < 2\Big\}\,,\\
&\Omega_4 := \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon \big(x_1 \in \mathbb{Q}, 0 < x_1 < 1, 1 < x_2 < 5\big) \vee \big(x_1 \notin \mathbb{Q}, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 5\big)\Big\}\,,\\
&\Omega_5 := \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon x_1^2 + x_2^2 < 1\Big\} \cup \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \leqslant 1\Big\}\,.
\end{aligned}
$$

Pour chacun des ensembles décider s'il est ouvert ou fermé ou ni ouvert ni fermé, s'il est borné ou non, et déterminer le bord. Justifier les réponses à partir des définitions.