Exercice 5.1. (Champs de vecteurs et crochet de Lie)

(a) Soient $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$ et $Y = x\dfrac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que XY n'est pas une dérivation de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(b) Soit M une variété différentiable et X, Y deux champs de vecteurs C^∞ sur M. Montrer que l'application suivante:

$$[X,Y] : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \quad \text{définie par} \quad [X,Y]f = XYf - YXf$$

définit un champ de vecteurs C^∞ sur M. Cet opérateur différentiel s'appelle le *crochet de Lie de X et Y*.

(c) Si les expressions de X et Y (dans un certain système de coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$) sont $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, trouver l'expression en coordonnées de $[X, Y]$.

(d) Déduire du point précédent que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \equiv 0,$$

pour tout champs de vecteurs de coordonnées.

(e) Montrer les propriétés suivantes du crochet de Lie:

(i) **Bilinéarité:** pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z,X] + b[Z,Y].$$

(ii) **Antisymétrie:**

$$[X,Y] = -[Y,X].$$

(iii) **Identité de Jacobi:**

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

(iv) Pour $f, g \in C^\infty(M)$:

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

(f) Pour les champs de vecteurs X, Y suivants définis sur $\mathbb{R}^3$, calculer leur crochet de Lie $[X, Y]$.

(i) $X = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$;

(ii) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$;

(iii) $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$;

Solution 5.1. (a) On montre que XY ne vérifie pas la règle de Leibniz. D'une part,

$$XY(fg) = X(fY(g) + gY(f)) = X\left(x^2\frac{\partial y}{\partial y} + yx\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x,$$

et d'autre part,

$$fXY(g) + gXY(f) = xX\left(x\frac{\partial y}{\partial y}\right) + yX\left(x\frac{\partial x}{\partial y}\right) = x\frac{\partial x}{\partial x} = x.$$

(b) On doit montrer que $[X,Y]$ est une dérivation globale de $C^\infty(M)$. De façon évidente, $[X,Y]$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Pour la règle de Leibniz, soient $f,g \in C^\infty(M)$. Alors

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X\left(Y(fg)\right) - Y\left(X(fg)\right) \\
&= X\left(fY(g) + gY(f)\right) - Y\left(fX(g) + gX(f)\right) \\
&= X(f)Y(g) + fX(Y(g)) + X(g)Y(f) + gX(Y(f)) \\
&\qquad - Y(f)X(g) - fY(X(g)) - Y(g)X(f) - gY(X(f)) \\
&= fX(Y(g)) + gX(Y(f)) - fY(X(g)) - gY(X(g)) \\
&= f[X,Y](g) + g[X,Y](f).
\end{aligned}$$

(c) Pour $f \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}
[X,Y](f) &= a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(b^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \\
&= a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + a^i b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - b^j a^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \\
&= a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} \\
&= \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

D'où

$$[X,Y] = \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

(d) Par le point précédent, si a^i et b^j sont des constantes, alors $[X,Y] \equiv 0$.

(e) La bilinéarité et l'antisymétrie sont clairs. Pour l'identité de Jacobi, on a:

$$\begin{aligned}
&[X,[Y,Z]](f) + [Y,[Z,X]](f) + [Z,[X,Y]](f) \\
&\quad = X([Y,Z](f)) - [Y,Z](X(f)) + Y([Z,X](f)) \\
&\qquad - [Z,X](Y(f)) + Z([X,Y](f)) - [X,Y](Z(f)) \\
&\quad = XYZ(f) - XZY(f) - YZX(f) + ZYX(f) + YZX(f) - YXZ(f) \\
&\qquad - ZXY(f) + XZY(f) + ZXY(f) - ZYX(f) - XYZ(f) + YXZ(f) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Pour (iv), on a si $h \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}
[fX,gY](h) &= fX(gY(h)) - gY(fX(h)) \\
&= fX(g)Y(h) + fgX(Y(h)) - gY(f)X(h) - gfY(X(h)) \\
&= fg([X,Y](h)) + (fXg)(Y(h)) - (gYf)(X(h)).
\end{aligned}$$

(f) On calcule et on trouve

(i) $[X,Y] = 4xy\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}$;

(ii) $[X,Y] = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$;

(iii) $[X,Y] = 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}$;

Exercice 5.2. (a) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit le gradient de f par le champ de vecteurs $\mathrm{grad} f \in \Gamma(M)$ tel que $\langle \mathrm{grad} f, X\rangle = df(X) = X(f)$ pour tout $X \in \Gamma(M)$.
Calculer l'expression du gradient en coordonnées.

(b) Soit $Y \in \Gamma(M)$ un champ de vecteurs, alors la divergence de Y est donnée par la fonction lisse $\mathrm{div}(Y) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ définie par $\mathrm{div}(Y) = \mathrm{Trace}(\nabla Y)$ où $\nabla Y : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ est donnée par $\nabla Y(X) = \nabla_X Y$.
Calculer l'expression de la divergence en coordonnées.

(c) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit le laplacien de f par la fonction $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$. Calculer l'expression du laplacien en coordonnées.

(d) Remarquer que si $M = \mathbb{R}^n$, les concepts de gradient, divergence et laplacien correspondent à ce que vous avez appris en deuxième année.

Solution 5.2. (a) Soit $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(M)$ un champ de vecteurs exprimé dans un système de coordonnées sur M. On calcule:

$$\begin{aligned} df.X = X(f) &= a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta^i_i \\ &= a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ik} g_{ki} \\ &= a^i g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle \\ &= a^i g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle \\ &= \langle a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle. \end{aligned}$$

Donc grad$f$ est le champ de vecteurs qui s'écrit $g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k}$ en coordonnées.

(b) La divergence d'un champ de vecteurs Y est la trace de l'endomorphisme $X \mapsto \nabla_X Y$. En coordonées, si $Y = b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, alors

$$\mathrm{div}(Y) = \sum_i \left(\frac{\partial b^i}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^i_{ij} b^j \right).$$

(c) Le Laplacien d'une fonction f est $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$. En coordonnées :

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$$

Remarque. On a par ailleurs la formule (assez subtile) suivante :

$$\sum_j \Gamma^j_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \log(\sqrt{|g|}) = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$$

où $|g| = \det(g_{i,j})$. On peut donc aussi écrire

$$\mathrm{div}(Y) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} \cdot b^i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial b^i}{\partial x^i} + \sum_j \frac{\partial \log(|g|)}{\partial x^j} \cdot b^j \right).$$

et

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} \cdot g^{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

(d) En effet, en coordonnées, ceci se voit directement, car "les coordonnées c'est comme dans $\mathbb{R}^n$" et dans $\mathbb{R}^n$, sans l'avoir dit, en deuxième année, on a pris la métrique Euclidienne $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Exercice 5.3. (a) Expliquer ce qu'on entend lorsqu'on dit qu'une connexion n'est pas un tenseur, puis justifier cette affirmation.

(b) Prouver la formule de changement de coordonnées pour les symboles de Levi-Civita: Supposons que $(x^1,\ldots,x^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $p \in M$ et $(y^1,\ldots,y^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $q = f(p) \in M$ avec f un changement de coordonnées. Montrer que le changement de coordonnées pour les symboles de Christoffels est donné par la formule

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x)\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(f(x))\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Solution 5.3. (a) Une connexion ∇ sur une variété différentiable M est par définition une application $\Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$. Pour qu'une telle application soit un (champ de) tenseurs, il faut qu'elle soit $C^\infty(M)$-bilinéaire. Une connexion n'est donc pas un tenseur car on a la propriété $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)\nabla Y$.
On peut aussi observer que la formule de changement de coordonnées pour les symboles de Christoffel n'est pas une formule de changement de coordonnées pour un champ de tenseurs (il ne devrait pas y avoir de dérivée seconde dans un changement de coordonnées tensoriel).

(b) C'est un cas particulier de l'exercice 54(a).

Exercice 5.4. On commence par une définition. Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre deux variétés différentiables, et soient ∇ une connection affine définie sur N et $\overline{\nabla}$ une connection affine sur M. On dit que f est *compatible* avec ∇ et $\overline{\nabla}$ si la condition suivante est satisfaite pour tous champs de vecteurs X, Y sur M :

$$f_*(\overline{\nabla}_X Y) = \nabla_{f_* X}(f_* Y).$$

Supposons que $(x^1,\ldots,x^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $p \in M$ et $(y^1,\ldots,y^m)$ est un système de coordonnées au voisinage de $q = f(p) \in N$.

(a) Montrer que les symboles de Christoffels de ∇ et $\overline{\nabla}$ sont reliés par la formule

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x)\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(f(x))\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}.$$

(b) Montrer que si f est un difféomorphisme local, alors on peut aussi écrire cette formule sous la forme

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x) = \sum_{\gamma=1}^{m}\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(f(x))\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}\right]\frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}.$$

(c) Montrer que si $M = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $f : M \to N$ est compatible avec ∇ si et seulement si f est une géodésique de N pour ∇ (on considère la connexion standard sur l'intervalle).

(d) Si $M = \mathbb{R}^m$ et $N = \mathbb{R}^n$ avec les connexions plates standards, alors $f : M \to N$ est compatible avec les connections si et seulement si c'est une application affine, c'est-à-dire une application du type $f(x) = Ax + b$ où A est une $n \times m$ matrice et $b \in \mathbb{R}^n$ est constant.

(e) Déduire de la formule en (b) une nouvelle solution de l'exercice 4.1 (lire éventuellement les sections 2.2 et 2.3 du polycopié).

Solution 5.4. (a) Rappelons que par définition

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x)\frac{\partial}{\partial x^k} \qquad \text{et} \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(y)\frac{\partial}{\partial y^\gamma}$$

On a aussi $y = f(x)$ et $f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$. On a donc d'une part

$$\begin{aligned}
\nabla_{f_*(\frac{\partial}{\partial x^i})} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)\\
&= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)\right]\\
&= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^\beta}\\
&= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(y)\frac{\partial}{\partial y^\gamma} + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^\beta}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'identité $\frac{\partial h}{\partial x^i} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial y^\alpha}$ valable pour toute fonction $h(x)$, on peut écrire

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^i \partial x^j}.$$

On a donc montré que

$$\begin{aligned}
\nabla_{f_*(\frac{\partial}{\partial x^i})} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(y)\frac{\partial}{\partial y^\gamma} + \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\\
&= \left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(y) + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^\gamma}.
\end{aligned}$$

On a d'autre part

$$f_*\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) = f_*\left(\overline{\Gamma}^k_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \overline{\Gamma}^k_{ij}(x) f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \overline{\Gamma}^k_{ij}(x)\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^\gamma}.$$

La condition n $f_*(\overline{\nabla}_X Y) = \nabla_{f_* X}(f_* Y)$ s'écrit donc

$$\overline{\Gamma}^k_{ij}(x)\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(y)\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j},$$

avec $y = f(x)$, pour tous α, β, γ. On a démontré la formule (a).

(b) Se déduit algébriquement de (a) et du fait que la matrice Jacobienne $\left(\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\right)$ est inversible si f est un difféomorphisme local.

(c) Si M est de dimension 1, alors les symboles de Christoffels $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ sont nuls (pour la connexion standard) et l'équation en (b) se ramène à

$$\frac{d^2 y^\gamma}{dx^2} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(f(x))\frac{dy^\alpha}{dx}\frac{dy^\beta}{dx} = 0,$$

qui est l'équation des géodésiques.

(d) Dans le cas où $\overline{\nabla}$ est la connection standard sur $M = \mathbb{R}^m$ et ∇ est la connection standard sur $N = \mathbb{R}^n$, alors les symboles de Christoffels $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ et $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ sont tous nuls. L'équation en (a) devient

$$\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} = 0, \qquad \forall \gamma = 1, .., n, \quad \forall i, j = 1, \ldots, m.$$

On déduit facilement que f est affine.

(e) On se donne deux systèmes de coordonnées (x^i) et (y^i) dans un ouvert U d'une variété M munie d'une connection ∇.
Les coefficients de la torsion sont définis dans le système de coordonnées (x^i) par

$$\overline{T}^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} = \overline{T}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k},$$

c'est-à-dire

$$\overline{T}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

De même

$$T_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma.$$

La formule en (b) (appliquée à $f = \mathrm{id}$) entraîne alors que

$$\overline{T}_{ij}^k(x) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n T_{\alpha\beta}^\gamma(f(x)) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}.$$

cela signifie que T vérifie la formule de transformation multilinéaire des tenseurs de type $\binom{1}{2}$.