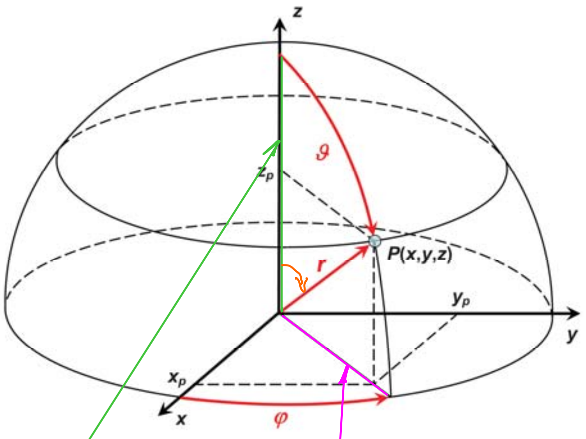
5.4.5 le laplacien en coordonnées sphériques (voir série 9A)

Définition des coordonnées sphériques



$r\cdot\cos(\vartheta)$ $\quad$ $r\cdot\sin(\vartheta)$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$0 \leq r < \infty$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cdot\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ y &= r\cdot\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cdot\cos(\vartheta) \end{aligned}}$$

r, ϑ, φ les coordonnées sphériques

$G : [0,\infty[\times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ surjective

$$\underbrace{]0,\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[}_{=:\tilde{D},\ \text{ouvert} \subset \mathbb{R}^3} \xrightarrow[\text{bijective}]{} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 : x \geq 0\}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cdot\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cdot\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$J_G(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \boxed{\cos(\vartheta)} & \boxed{-r\sin(\vartheta)} & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\det J_G(r,\vartheta,\varphi) =}$ "développer la dernière ligne"

$$= \underbrace{r\cdot\sin(\vartheta)\sin(\vartheta)^2\cdot r}\ + \underbrace{\cos(\vartheta)\, r^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}$$

$$\boxed{= r^2\cdot\sin(\vartheta)}$$ apprendre par cœur